



UNIVERSITÀ  
DEGLI STUDI  
FIRENZE

## FLORE

# Repository istituzionale dell'Università degli Studi di Firenze

### **Uno studio numerico sul coefficiente di forma b nel criterio di rottura a taglio per fessurazione diagonale di pannelli di muratura ordinaria**

Questa è la Versione finale referata (Post print/Accepted manuscript) della seguente pubblicazione:

*Original Citation:*

Uno studio numerico sul coefficiente di forma b nel criterio di rottura a taglio per fessurazione diagonale di pannelli di muratura ordinaria / M. Betti; L. Galano; M. Petracchi; A. Vignoli. - In: INGEGNERIA SISMICA. - ISSN 0393-1420. - STAMPA. - XXVIII(2):(2011), pp. 31-50.

*Availability:*

This version is available at: 2158/583308 since:

*Terms of use:*

Open Access

La pubblicazione è resa disponibile sotto le norme e i termini della licenza di deposito, secondo quanto stabilito dalla Policy per l'accesso aperto dell'Università degli Studi di Firenze (<https://www.sba.unifi.it/upload/policy-oa-2016-1.pdf>)

*Publisher copyright claim:*

(Article begins on next page)

# Uno studio numerico sul coefficiente di forma $b$ nel criterio di rottura a taglio per fessurazione diagonale di pannelli di muratura ordinaria

Michele Betti\*, Luciano Galano\*, Michele Petracchi\*\*, Andrea Vignoli\*

**SOMMARIO** – Nel lavoro, dopo avere richiamato i meccanismi di rottura dei pannelli murari previsti dalle nuove norme tecniche per le costruzioni (NTC 2008), viene presentata un'indagine numerica sul valore del coefficiente di forma  $b$  relativo al criterio di rottura a taglio per fessurazione diagonale. I risultati delle analisi, lineari e non lineari, mostrano che i valori di  $b$  sono più elevati di quelli della formulazione semplificata adottata nella norma, con conseguente riduzione, anche sensibile, del valore del taglio ultimo per fessurazione diagonale.

**Parole chiave:** muratura ordinaria, criteri di rottura, rottura a taglio, coefficiente di forma  $b$ , fessurazione diagonale.

## 1. Introduzione

Il recente quadro normativo introdotto nel 2008 dalle nuove Norme Tecniche per le Costruzioni /1/ e dalla relativa Circolare Ministeriale /2/ ha comportato sostanziali modifiche nel calcolo sismico delle strutture in muratura portante. Questi mutamenti hanno interessato sia le modalità di analisi strutturale, sia i criteri sulla base dei quali effettuare le verifiche di sicurezza degli elementi resistenti, ovvero dei pannelli murari.

Nel precedente quadro normativo /3/, risalente al 1996, la valutazione delle sollecitazioni indotte dalle azioni sismiche veniva effettuata secondo due diversi schemi di calcolo, relativi a due possibili modalità di collasso, secondo quanto specificato al punto 3.1.1 della Circolare Ministeriale del 30 Luglio 1981 /4/ (Fig. 1). Il primo schema era relativo a pareti caratterizzate da fasce di piano molto rigide e di sufficiente resistenza (Fig. 1a); per queste pareti il collasso era imputato alla rottura a taglio degli elementi murari verticali, cioè dei maschi. Il secondo schema era invece relativo al caso di pareti dotate di fasce di piano con rigidezza e resistenza limitate (Fig. 1b); in queste pareti veniva assunto che la crisi si manifestasse per rottura a taglio delle fasce, per l'effetto combinato della flessione e del taglio. Come osserva anche Augenti /5/, la Circolare Ministeriale del 30 Luglio 1981 associava il primo schema di calcolo a pareti tozze, come quelle degli edifici di limitata altezza (2 o 3 piani), ed il secondo schema a pareti snelle, riconducibili ad edifici con 4 piani ed oltre confondendo, pericolosamente, i maschi tozzi con le pareti tozze. È infatti evidente che la snellezza del singolo pannello murario, sia maschio che fascia, è legata principalmente alle dimensioni delle aperture adiacenti piuttosto che alla snellezza complessiva della parete di appartenenza.

Inoltre, in merito alle verifiche di sicurezza, la Circolare Ministeriale /4/ prendeva in considerazione esclusivamente il criterio di rottura a taglio per fessurazione diagonale originariamente formulato da Turnsek e Cacovic /6/, mostrandone anche qualche applicazione in Appendice. In particolare, tale criterio era illustrato per alcune verifiche sismiche di edifici regolari in muratura ordinaria le cui pareti erano analizzate secondo lo schema della Fig. 1a: ipotesi di fasce di piano infinitamente rigide e resistenti che vincolano i maschi con modalità tipiche dei telai *shear-type*. Secondo tale schema la crisi nei maschi si manifestava per rottura a taglio per fessurazione diagonale, in accordo con il modello di analisi per piani che caratterizza il noto metodo POR /7/. La combinazione di questi fatti, come sottolinea lo stesso Augenti /5/, ha finito per convincere sia i progettisti sia gli organi di controllo che lo schema di analisi e verifica sismica sopra descritto avesse validità generale, con il risultato che questo è

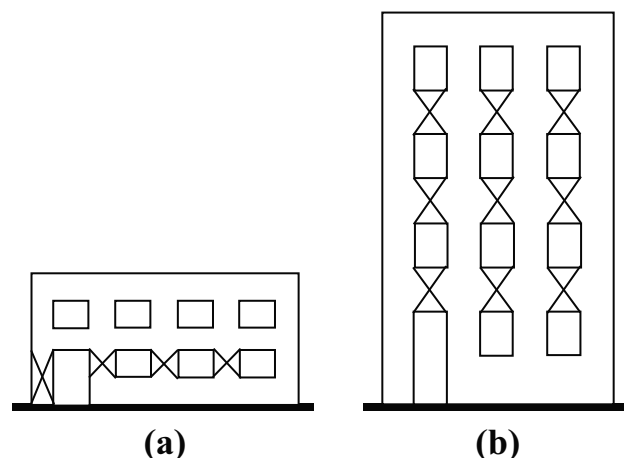


Fig. 1. Modelli di calcolo delle pareti secondo la Circolare Ministeriale del 30 Luglio 1981; (a) edifici di 2 o 3 piani, (b) edifici di 4 o più piani.

Models of masonry walls according to the technical document /4/; (a) buildings with 2 or 3 story's, (b) buildings with 4 or more story's.

\* Dipartimento di Ingegneria Civile e Ambientale (DICEA), Università degli Studi di Firenze, e.mail: mbetti@dicea.unifi.it

\*\* Ingegnere Civile, e.mail: rrb@teletu.it

stato applicato acriticamente a tutti gli edifici prescindendo dall'effettivo meccanismo di collasso interessante il pannello murario.

Il nuovo quadro normativo delle NTC 2008 /1/ ha, di fatto, rimosso queste ambiguità poiché richiede, almeno per le nuove costruzioni, che la modellazione e l'analisi siano estese all'intero organismo strutturale portante a garanzia del soddisfacimento dell'equilibrio globale e non più sviluppate per singoli piani.

Va tuttavia osservato che le NTC 2008, sia pur limitatamente ad unità strutturali (US) di costruzioni murarie esistenti facenti parte di aggregati edilizi (strutture contigue, a contatto od interconnesse), consentono di sviluppare la verifica sismica analizzando ogni singolo piano. Infatti, al punto 8.7.1 delle norme si riporta: *“la verifica di una unità strutturale dotata di solai sufficientemente rigidi può essere svolta, anche per edifici con più di due piani, mediante l'analisi statica non lineare, analizzando e verificando separatamente ciascun interpiano dell'edificio, e trascurando la variazione della forza assiale nei maschi murari dovuta all'effetto dell'azione sismica”*. Non essendo raccomandati specifici criteri di rottura si deve tuttavia ritenere che, anche applicando tale modalità operativa (analisi statica non lineare separata per ciascun interpiano), si debbano considerare, sia per i maschi che per le fasce di piano, le possibili modalità di collasso per taglio e per pressoflessione.

Nell'ambito delle modifiche introdotte dalle nuove norme tecniche questo lavoro si pone l'obiettivo di analizzare criticamente alcuni aspetti di uno dei criteri di rottura dei pannelli murari proposti dalle norme stesse. In particolare si vuol mostrare che, nel criterio di rottura a taglio per fessurazione diagonale il coefficiente di forma  $b$ , valutato con analisi numeriche sviluppate in ambito FEM, assume valori sensibilmente diversi da quelli della formulazione contenuta nella Circolare Ministeriale del 2 Febbraio 2009 /2/. Vengono quindi fornite due formulazioni alternative del coefficiente  $b$  in funzione della snellezza dei pannelli.

## 2. Meccanismi di rottura dei pannelli murari

Le modalità di collasso dei pannelli murari (maschi se ad asse verticale, fasce se ad asse orizzontale) previste dalle nuove norme tecniche /1, 2/ per la verifica sismica delle costruzioni in muratura sono tre (Fig. 2): (a) rottura per pressoflessione, (b) rottura a taglio per fessurazione diagonale e (c) rottura a taglio per scorrimento. Se la verifica sismica dell'edificio è condotta mediante un metodo di analisi lineare le norme definiscono, per ciascuna di esse, un valore limite della capacità portante espresso in termini di sollecitazione resistente. Per i maschi murari il momento flettente resistente di progetto associato alla crisi per pressoflessione è fornito con l'espressione:

$$M_u = \frac{Pl}{2} \left( 1 - \frac{\sigma_0}{0.85f_d} \right) \quad (1)$$

Il taglio resistente di progetto nel meccanismo di rottura per fessurazione diagonale è definito dalla rela-

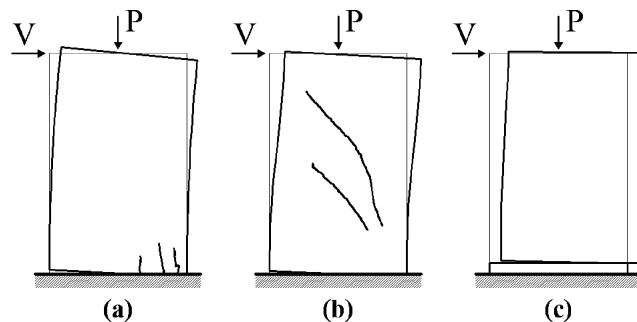


Fig. 2. Meccanismi di rottura dei pannelli murari nel piano. In-plane failure modes of masonry piers subject to shear.

zione seguente, introdotta relativamente alle costruzioni esistenti /2/:

$$V_t = lt \frac{f_{td}}{b} \sqrt{1 + \frac{\sigma_0}{f_{td}}} = lt \frac{1.5\tau_{0d}}{b} \sqrt{1 + \frac{\sigma_0}{1.5\tau_{0d}}} \quad (2)$$

Infine, il taglio resistente di progetto associato alla rottura per scorrimento è ricavabile mediante la seguente relazione:

$$V_t = l't f_{vd} = l't \frac{f_{vk0} + 0.4\sigma_n}{\gamma_M} = l't \frac{(f_{vk0} + 0.4 \frac{P}{l't})}{\gamma_M} \quad (3)$$

I simboli relativi alle grandezze geometriche presenti nelle equazioni da (1) a (3) assumono il seguente significato:  $l$  è la larghezza del pannello,  $t$  è lo spessore del pannello e  $b$  è un coefficiente di forma relativo alla distribuzione delle tensioni tangenziali nella sezione trasversale al centro del pannello. I simboli relativi alle grandezze meccaniche sono:  $f_d$  è la resistenza a compressione di progetto della muratura,  $f_{td}$  è la resistenza a trazione per fessurazione diagonale di progetto,  $f_{vd}$  è la resistenza a taglio per scorrimento di progetto,  $f_{vk0}$  è la resistenza caratteristica a taglio per scorrimento in assenza di sforzo normale e  $\tau_{0d}$  è la resistenza a taglio di progetto in assenza di sforzo normale, nel criterio di rottura per fessurazione diagonale. Infine,  $P$  è lo sforzo normale agente sul pannello,  $\sigma_0$  è la tensione normale media sulla sezione resistente non parzializzata [ $\sigma_0 = P/(lt)$ ] e  $\sigma_n$  è la tensione normale media agente sulla sezione resistente parzializzata [ $\sigma_n = P/(l't)$ ]. Il coefficiente  $\gamma_M$  è un coefficiente parziale di sicurezza.

Il valore  $l'$  corrisponde alla lunghezza del tratto compreso della sezione parzializzata e può essere valutato mediante la seguente espressione:

$$l' = 3 \left( \frac{l}{2} - e \right) = 3 \left( \frac{l}{2} - \frac{M}{P} \right) \quad (4)$$

nella quale  $e$  indica l'eccentricità dell'azione assiale  $P$  nella sezione di verifica ed  $M$  è il momento flettente agente. Come è possibile dedurre esaminando l'Eq. (2), la Circolare /2/ lega la tensione tangenziale resistente per taglio  $\tau_{0d}$  alla resistenza a trazione  $f_{td}$  mediante l'espressione:

$$f_{td} = 1.5\tau_{0d} \quad (5)$$

In tal modo, la resistenza  $\tau_{0d}$  viene a perdere il significato originale di resistenza a taglio in assenza di azione assiale, a meno che non si assuma per il coefficiente di forma  $b$  il valore 1.5. La resistenza  $\tau_{0d}$  diviene quindi semplicemente una grandezza associata alla  $f_{td}$  per definire il taglio resistente  $V_r$ .

Per le fasce di piano si possono impiegare le stesse espressioni purché sia noto lo sforzo normale  $P$  agente. In caso contrario, come ad esempio per analisi sviluppate adottando modelli a telaio equivalente con l'ipotesi di solai infinitamente rigidi nel piano, il momento flettente ultimo legato alla crisi per pressoflessione deve essere valutato con la:

$$M_u = \frac{H_p h}{2} \left( 1 - \frac{H_p}{0.85 f_{hd} h t} \right) \quad (6)$$

mentre la resistenza a taglio è definita come il valore minore fra quella associata al meccanismo di collasso per pressoflessione:

$$V_p = \frac{2M_u}{l} \quad (7)$$

e quella associata alla rottura per scorrimento:

$$V_i = h t f_{vd0} \quad (8)$$

I simboli relativi alle grandezze geometriche riportati nelle equazioni da (6) a (8) assumono il seguente significato:  $h$  è l'altezza della sezione della trave in muratura,  $t$  è il suo spessore ed  $l$  è la sua lunghezza libera. Le grandezze meccaniche sono:  $f_{vd0}$  è la resistenza a taglio di progetto della muratura in assenza di compressione,  $f_{hd}$  è la resistenza a compressione di progetto in direzione orizzontale nel piano della parete e  $H_p$  è il minimo fra la resistenza a trazione dell'elemento teso disposto orizzontalmente (cordolo o tirante) ed il valore  $0.4 f_{hd} h t$ .

La norma /1, 2/ precisa che le equazioni (6), (7) e (8) sono applicabili soltanto in presenza di un elemento orizzontale resistente a trazione (cordolo in c.a. o tirante in acciaio) in grado di equilibrare una compressione orizzontale nella trave in muratura. Per le fasce murarie prive di tale rafforzamento l'unico criterio di rottura per taglio concretamente applicabile, anche se non espressamente dichiarato, sembra essere quello della fessurazione diagonale, utilizzando un'espressione identica alla (2) con  $h$  al posto di  $l$ . In tal caso il valore della tensione media  $\sigma_0$ , se non noto, deve essere assunto pari a zero. Evidentemente, oltre a tale criterio di rottura a taglio, non si può comunque prescindere da un criterio di resistenza per flessione poiché, in assenza di compressione, tale resistenza può essere bassa e molto più vincolante della resistenza a taglio.

Il nuovo quadro normativo è quindi molto più articolato del precedente, anche in relazione al fatto che le caratteristiche meccaniche di progetto sono definite sulla base dei valori caratteristici per le costruzioni

nuove, diversamente dalle costruzioni esistenti, per le quali si assumono invece i valori medi.

### 3. Il coefficiente di forma $b$ nel criterio di rottura a taglio per fessurazione diagonale

Il quadro normativo del 1996 /3/ assumeva la seguente espressione per il criterio di rottura a taglio per fessurazione diagonale:

$$V_i = l t \tau_k \sqrt{1 + \frac{\sigma_0}{1.5 \tau_k}} \quad (9)$$

La (9), riportata nell'Appendice della Circolare Ministeriale del 30 Luglio 1981 /4/, era anche l'unico criterio di rottura a taglio esplicitamente previsto per la verifica sismica dei pannelli in muratura. Essa fu originariamente proposta da Turnsek e Cacovic /6/ per pannelli soggetti a compressione e taglio in configurazione di vincolo di *double bending*. Con questo criterio si supposeva che la prima lesione avesse origine al centro dell'elemento in corrispondenza del raggiungimento della resistenza a trazione della muratura, e che essa si propagasse seguendo la diagonale del pannello (Fig. 2b). L'Eq. (9) è applicabile, in modo rigoroso, solo per elementi assimilabili per valori della snellezza  $\lambda = h/l$  (rapporto fra l'altezza del pannello  $h$  e la larghezza della sezione trasversale  $l$ ) al solido di Saint-Venant. Infatti, solo in tali ipotesi, la quantità  $1.5 \tau_k$  al denominatore della frazione sotto il segno di radice equivale al valore massimo della tensione tangenziale al centro di un pannello di sezione rettangolare.

Come già osservato, considerando  $\tau_{0d}$  come parametro equivalente a  $\tau_k$ , le relazioni (2) e (9) coincidono soltanto per  $b = 1.5$ . Ma le norme tecniche suggeriscono di utilizzare valori di  $b$  variabili in funzione della snellezza  $\lambda$  dei pannelli. In particolare, al punto C8.7.1.5 della Circolare Ministeriale /2/, è dichiarato quanto segue: "*b è un coefficiente correttivo legato alla distribuzione degli sforzi sulla sezione, dipendente dalla snellezza della parete. Si può assumere  $b = h/l$ , comunque non superiore a 1.5 e non inferiore a 1.0, dove  $h$  è l'altezza del pannello*". Questa definizione riprende quella fornita da Benedetti e Tomazevic /8/, riassumibile nella seguente:

$$b = \begin{cases} 1.0 \dots & \text{per } \lambda = h/l \leq 1.0 \\ \lambda \dots & \text{per } 1.0 < \lambda = h/l < 1.5 \\ 1.5 \dots & \text{per } 1.5 \leq \lambda = h/l \end{cases} \quad (10)$$

Nella Fig. 6 sono messi a confronto gli andamenti del coefficiente di forma  $b$  secondo Turnsek e Cacovic /6/ e secondo Benedetti e Tomazevic /8/. La formulazione (10) ha il pregio di essere di semplice applicazione, ma è affetta da un certo grado di approssimazione in quanto, per elementi con snellezze inferiori a 1.5, i valori di  $b$  da essa ottenuti risultano sensibilmente sottostimati portando, attraverso l'Eq. (2), ad una sovrastima del taglio ultimo resistente. Questo può essere

facilmente verificato analizzando, ad esempio, i risultati di precedenti ricerche.

Nel lavoro /9/ Chiostrini e Vignoli determinano le caratteristiche meccaniche di alcuni pannelli di muratura caratterizzati da valori di snellezza unitari ( $\lambda = h/l = 1$ ) mediante prove di taglio-compressione *in-situ*. Essi valutano il coefficiente  $b$  riferendosi ad un criterio di Turnsek e Sheppard /10/, direttamente legato allo stato di sollecitazione del pannello:

$$(\lambda = 1) \quad b = 1.543 - 0.478 \frac{\tau_u}{\sigma_0} \quad (11)$$

Nella (11), oltre alle grandezze già note, compare il termine  $\tau_u$ , tensione tangenziale media a rottura per fessurazione diagonale. Nella Tab. 1 sono riassunti i valori di  $b$  calcolati dagli Autori applicando la (11) ai risultati delle prove sperimentali sui pannelli murari investigati. Nella stessa tabella tali valori sono confrontati con quelli determinabili utilizzando la formulazione (10) di Benedetti e Tomazevic. Le differenze percentuali sui valori di  $b$  sono significative.

Tabella 1. Valori del coefficiente di forma  $b$ .  
b shape factor values.

Pannello	$\lambda$	$b$ Eq. (10) - da /8/	$b$ Eq. (11) - da /9/	Differenza (%)
T1	1	1.00	1.37	+37
T2	1	1.00	1.40	+40
T3	1	1.00	1.29	+29
T4	1	1.00	1.19	+19
COR1	1	1.00	1.23	+23
COR2	1	1.00	1.33	+33
Ist. Belm.	1	1.00	1.14	+14

Calderini *et al.* in /11/ hanno effettuato alcune simulazioni numeriche agli elementi finiti adottando un legame costitutivo anisotropo non lineare messo a punto da Calderini e Lagomarsino /12/, ed analizzando tre maschi murari indicati con Pier-1, Pier-2 e Pier-3. Questi pannelli sono caratterizzati da snellezze diverse: 0.65 per Pier-1, 1.35 per Pier-2 e 2.00 per Pier-3. Sotto l'effetto di un carico assiale costante, i maschi sono stati sottoposti ad uno spostamento crescente in sommità fino al raggiungimento della condizione di collasso che, per i primi due elementi (Pier-1 e Pier-2), avviene per fessurazione diagonale mentre per il terzo (Pier-3) avviene per pressoflessione. Analizzando i risultati delle analisi numeriche riportati nel lavoro si può osservare che il coefficiente  $b$  varia con lo stato tensionale e deformativo del pannello esaminato. In particolare, passando dal regime elastico lineare alla fase a comportamento non lineare, è stato rilevato che per Pier-1 ( $\lambda = 0.65$ )  $b$  decresce da 1.33 fino a 1.15, per Pier-2 ( $\lambda = 1.35$ )  $b$  decresce da 1.44 fino a 1.37 e per Pier-3 ( $\lambda = 2.00$ )  $b$  passa da 1.48, ad un valore leggermente superiore a 1.50. Per i due maschi più tozzi (Pier-1 e Pier-2) il coefficiente  $b$  assume valori che, anche in campo non lineare, si discostano in modo evidente da quelli deducibili dalla relazione (10). Gli

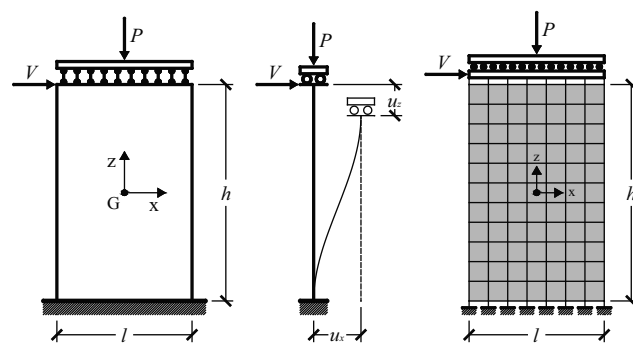


Fig. 3. Pannello murario con compressione assiale e vincolo di double bending e schema della modellazione agli elementi finiti.  
Masonry pier subject to shear and compression with double bending boundary conditions and FEM model.

stessi Autori osservano che, sebbene l'ipotesi di assumere il coefficiente  $b$  come una funzione di  $\lambda$  con asintoti 1.0 e 1.5 risulti coerente, questo non sembra essere cautelativo nel caso di maschi tozzi. Analizzando l'evoluzione dello stato tensionale di Pier-1, essi hanno accertato che il coefficiente di forma  $b$  non scende al disotto del valore di 1.15.

Dai risultati di entrambe le ricerche si deduce che i valori effettivamente assunti dal coefficiente  $b$ , per pannelli tozzi ( $\lambda \leq 1$ ) o mediamente tozzi ( $1 < \lambda < 1.5$ ), si discostano apprezzabilmente da quelli della formulazione contenuta nell'attuale normativa /2/.

#### 4. Indagini numeriche sul valore del coefficiente di forma $b$

Quanto sopra riportato fa emergere la necessità di approfondire la relazione esistente tra il coefficiente di forma  $b$  e la snellezza  $\lambda$  dei pannelli. Uno studio esauriente, oltre alla dipendenza di  $b$  dalla geometria del pannello, dovrebbe valutare anche l'influenza delle condizioni di vincolo presenti nelle sezioni di estremità (casi limite di *double bending*, di *single bending* e configurazioni intermedie), l'influenza delle proprietà meccaniche del materiale (modulo elastico, coefficiente di Poisson e resistenza della muratura) ed il ruolo della tensione media di compressione agente sul pannello. Le indagini qui presentate, di natura numerica, non considerano tutti i precedenti fattori, analizzando principalmente la relazione esistente tra  $b$  e  $\lambda$ ; tuttavia esse forniscono informazioni sufficienti a comprendere la variazione del parametro  $b$ .

Attenendosi alle ipotesi con cui è stato definito il criterio di rottura a taglio per fessurazione diagonale di Turnsek e Cacovic, ovvero che /6/: “lo stato tensionale viene determinato assimilando la muratura ad un materiale elastico, omogeneo ed isotropo, sino al manifestarsi della prima fessurazione”, una prima serie di analisi è stata condotta in campo lineare modellando, con un elemento finito bidimensionale isoparametrico a 4 nodi, 67 diverse geometrie di un pannello murario sottoposto a condizioni di vincolo di *double bending*

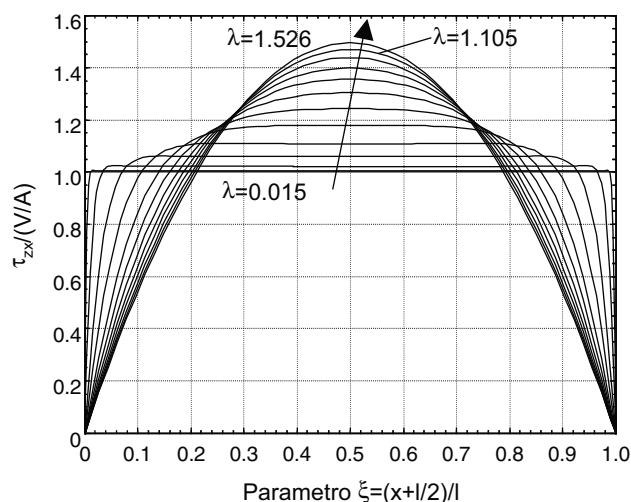


Fig. 4. Andamento della tensione tangenziale  $\tau_{zx}$  lungo la sezione trasversale centrale dei pannelli ottenuta con le analisi lineari (caso A). Shear stresses  $\tau_{zx}$  in the midheight section of panels (linear FEM analyses, case A).

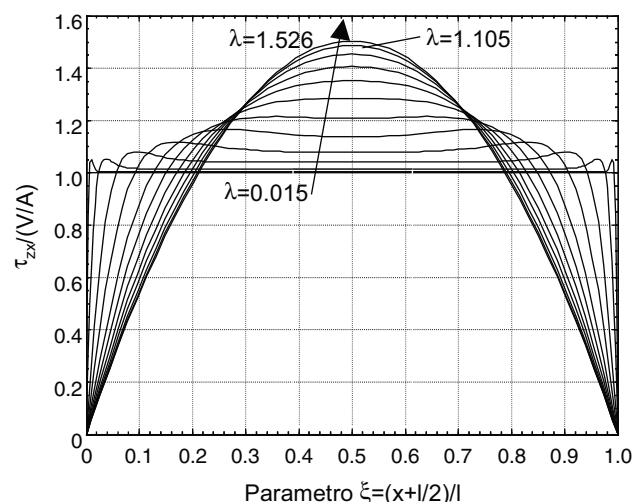


Fig. 5. Andamento della tensione tangenziale  $\tau_{zx}$  lungo la sezione trasversale centrale dei pannelli ottenuta con le analisi lineari (caso B). Shear stresses  $\tau_{zx}$  in the midheight section of panels (linear FEM analyses, case B).

(Fig. 3). In particolare i nodi alla base sono impediti di traslare sia in direzione  $x$  che in direzione  $z$ , mentre i nodi di sommità sono impediti di traslare in direzione  $z$  e liberi di traslare in direzione  $x$ .

Le caratteristiche meccaniche attribuite ai modelli così definiti sono indicate nella Tab. 2. Le analisi indicate con A ( $\nu = 0$ ;  $E/G = 2$ ), seppur non pienamente significative per casi reali, hanno lo scopo di definire  $b(\lambda)$  in una condizione limite (materiale ideale, senza contrazione laterale); le analisi indicate con B ( $\nu = 0.5$ ;  $E/G = 3$ ) sono invece molto prossime ad una muratura reale costituita da elementi resistenti di materiale lapideo, come si può anche dedurre esaminando le tipologie riportate nella [2].

Tabella 2. Proprietà meccaniche adottate per la modellazione della muratura in campo lineare.

Mechanical properties of masonry used in the linear FEM analyses.

	$E$ (N/mm <sup>2</sup> )	$G$ (N/mm <sup>2</sup> )	$\nu$
Caso A	2000	1000	0.00
Caso B	2000	667	0.50

Sono stati dunque analizzati 134 casi (67 con i parametri A e 67 con i parametri B) con larghezza e spessore dei pannelli unitari (pari a 1.000 mm) e altezze variabili in modo da ottenere snellezze comprese tra 0.015 e 3.0. I pannelli sono stati discretizzati con elementi quadrati di dimensioni variabili con la snellezza. Essi sono stati sottoposti ad uno sforzo di compressione  $P$  e ad uno sforzo di taglio  $V$  assunti entrambi di valore unitario (pari a 1 N). Il coefficiente di forma  $b$  è definito come il rapporto fra il valore massimo della tensione tangenziale  $\tau_{zx}$  in corrispondenza della sezione trasversale centrale del pannello ed il valore medio della stessa tensione, ed è ricavabile con la seguente espressione:

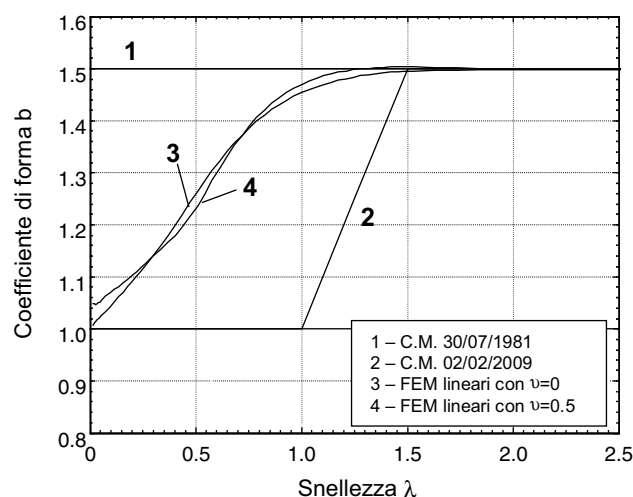


Fig. 6. Confronto fra gli andamenti del coefficiente di forma  $b$  previsti dalle vigenti norme, dalle norme attuali con quelli ricavati con le analisi numeriche in campo lineare.

Comparisons of the  $b$  shape factor evaluated according to the previous Italian technical law, the actual Italian technical law and the results of the linear FEM analyses.

$$b = \frac{\tau_{zx,max}}{\tau_{zx,med}} = \frac{\tau_{zx,max}}{V} l t \quad (12)$$

Sono stati preliminarmente ricavati i diagrammi della distribuzione di  $\tau_{zx}$  lungo la sezione trasversale centrale al variare della snellezza dei pannelli. Nella Fig. 4 sono riportati quelli relativi ai pannelli del caso A e nella Fig. 5 sono riportati i diagrammi ottenuti per i pannelli del caso B ( $A = l t$ ). Le distribuzioni sono presentate in forma adimensionale e sono relative a 12 valori di snellezza, compresi fra 0.015 e 1.526. È immediato osservare che, per ambedue i casi A e B, per  $\lambda \leq 1$  la

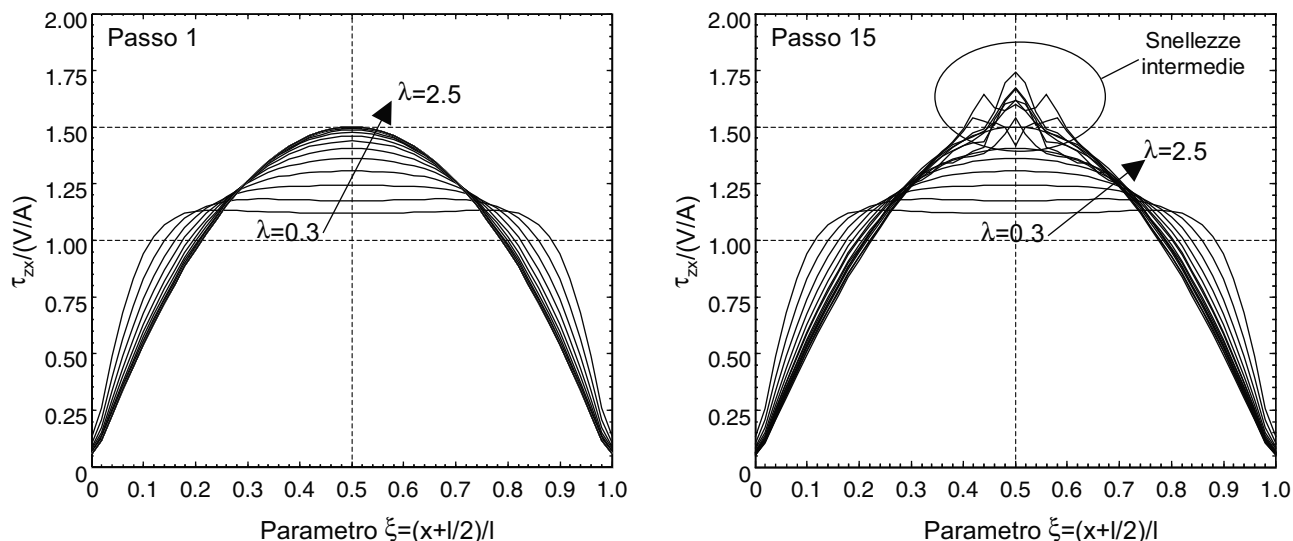


Fig. 7. Andamento della tensione tangenziale  $\tau_{zx}$  lungo la sezione trasversale centrale dei pannelli ottenuta con le analisi non lineari (caso ACF 0.4, passo 1 (regime lineare) e passo 15).

Shear stresses  $\tau_{zx}$  in the midheight section of panels (nonlinear FEM analyses, case ACF 0.4, step 1 and step 15).

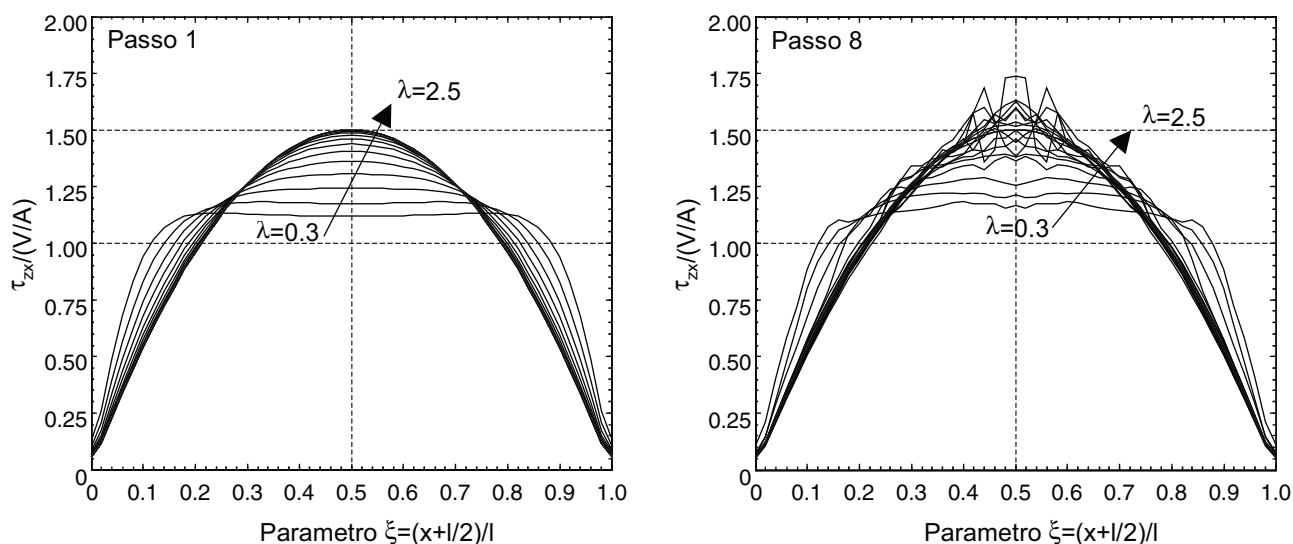


Fig. 8. Andamento della tensione tangenziale  $\tau_{zx}$  lungo la sezione trasversale centrale dei pannelli ottenuta con le analisi non lineari (caso ACS 0.4, passo 1 (regime lineare) e passo 8).

Shear stresses  $\tau_{zx}$  in the midheight section of panels (nonlinear FEM analyses, case ACS 0.4, step 1 and step 8).

distribuzione della  $\tau_{zx}$  non è uniforme; essa tende a tale condizione solo per piccoli valori di  $\lambda$  ( $0.015 \div 0.053$ ). Questo risultato è già indice del fatto che per  $\lambda \leq 1$ ,  $b$  non può essere uguale ad 1. La Fig. 6 mostra le curve  $b(\lambda)$  ottenute per i casi A e B utilizzando l'Eq. (12), confrontate con quella definita in conformità al criterio di Turnsek e Cacovic ( $b = 1.5$ ) e con quella relativa alla relazione di Benedetti e Tomazevic [8]. È evidente che per  $\lambda < 1.5$  i valori di  $b$  desunti per via numerica sono apprezzabilmente diversi da quelli forniti dalla legge (10) raccomandata nella [2], mentre per  $\lambda > 1.5$  essi tendono asintoticamente alla retta  $b = 1.5$ . Le coordinate delle due distribuzioni del coefficiente di forma diagrammate nella Fig. 6 (curve 3 e 4) sono anche riportate nella Tab. 3, per alcuni valori della snellezza.

Tabella 3. Coefficiente di forma  $b$  in funzione della snellezza ottenuto con le analisi lineari.

$b$  shape factor vs panel slenderness (linear analyses).

Snellezza $\lambda$	Caso A	Caso B	Snellezza $\lambda$	Caso A	Caso B
0.015	1.01	1.05	0.614	1.32	1.31
0.028	1.01	1.05	0.719	1.37	1.37
0.040	1.02	1.05	0.860	1.42	1.43
0.053	1.02	1.05	0.930	1.44	1.45
0.095	1.04	1.07	1.000	1.45	1.47
0.137	1.06	1.08	1.105	1.47	1.49
0.200	1.09	1.10	1.211	1.48	1.50
0.242	1.11	1.12	1.316	1.49	1.50
0.298	1.14	1.14	1.491	1.49	1.50
0.333	1.16	1.15	2.053	1.50	1.50
0.404	1.20	1.18	2.579	1.50	1.50
0.509	1.26	1.24	3.000	1.50	1.50

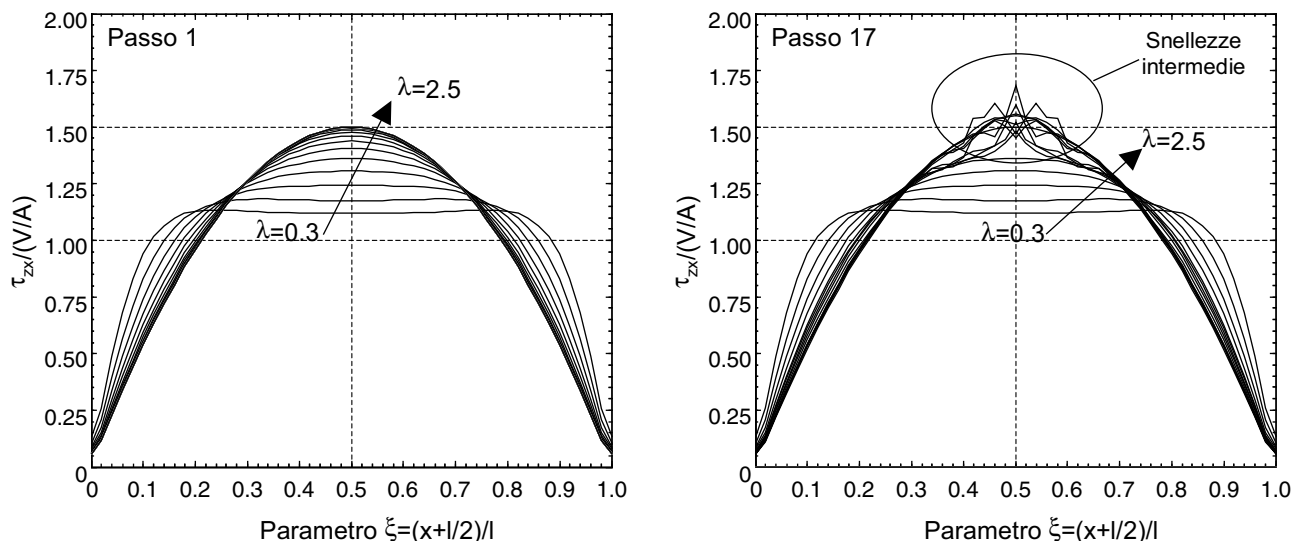


Fig. 9. Andamento della tensione tangenziale  $\tau_{xz}$  lungo la sezione trasversale centrale dei pannelli ottenuta con le analisi non lineari (caso ACF 0.6, passo 1 (regime lineare) e passo 17).

Shear stresses  $\tau_{xz}$  in the midheight section of panels (nonlinear FEM analyses, case ACF 0.6, step 1 and step 17).

Questi risultati mostrano che, nei riguardi della sollecitazione di taglio, un pannello murario in condizioni di vincolo di *double bending* si discosta poco, pur decrescendo la snellezza, dal comportamento del solido di Saint-Venant. Infatti, la distribuzione della tensione tangenziale  $\tau_{xz}$  si discosta da quella uniforme ( $b = 1$ ) già per snellezze assai piccole ( $0.015 \div 0.053$ ). Tenendo conto che, nelle comuni strutture in muratura portante, è piuttosto infrequente la presenza di pannelli caratterizzati da snellezze inferiori a 0.3, è ragionevole ritenere che la condizione  $b = 1$  sia raggiunta assai raramente, e dunque che la relazione (10) non sia molto attendibile per pannelli reali tozzi.

Una seconda serie di analisi è stata condotta estendendo la risposta delle murature oltre la soglia del comportamento lineare. I modelli numerici sono stati realizzati con il codice ANSYS /13/ utilizzando elementi finiti tridimensionali isoparametrici ad 8 nodi. Per modellare il comportamento meccanico non lineare dei pannelli in muratura è stato utilizzato il criterio di plasticizzazione di Drucker-Prager (DP) /14/ combinato con il criterio di rottura di Willam-Warnke (WW) /15/. Tale scelta consente di modellare il materiale come un mezzo isotropo capace di deformarsi plasticamente, di fessurarsi per trazione e schiacciarsi per compressione. Le proprietà meccaniche della muratura sono riassunte nella Tab. 4; con l'eccezione del valore del peso specifico, il materiale è lo stesso che Betti *et al.* hanno utilizzato per modellare tre pareti murarie nei lavori /16/ e /17/. È opportuno evidenziare la differenza tra i valori delle resistenze a trazione ed a compressione del criterio di Drucker-Prager,  $f_{iDP} = 0.216$  N/mm<sup>2</sup>,  $f_{cDP} = 1.522$  N/mm<sup>2</sup> e del criterio di Willam-Warnke,  $f_{iWW} = 0.15$  N/mm<sup>2</sup> e  $f_{cWW} = 4.0$  N/mm<sup>2</sup>. Tale scelta, nel campo delle trazioni ed in regime di sforzo biassiale trazione-compressione con compressioni medio-basse, corrisponde ad un materiale con comportamento elasto-

fragile, mentre in regime di sforzo biassiale trazione-compressione con compressioni elevate, ed in regime di compressione biassiale, si ha un materiale con comportamento elastoplastico.

Tabella 4. Proprietà meccaniche adottate per la modellazione della muratura in campo non lineare.

Mechanical properties of masonry used in the nonlinear FEM analyses.

Parametri elastici		
$E$ N/mm <sup>2</sup>	Modulo di elasticità normale	2000
$G$ N/mm <sup>2</sup>	Modulo di elasticità tangenziale	800
$\nu$	Rapporto di Poisson	0.25
$w$ kN/m <sup>3</sup>	Peso specifico	0
Parametri della superficie di plasticizzazione (DP)		
$c$ N/mm <sup>2</sup>	Coesione	0.24
$\phi$	Angolo di attrito	55°
$\eta$	Angolo di dilatanza	55°
$f_{cDP}$ N/mm <sup>2</sup>	Resistenza a compressione monoassiale	1.522
$f_{iDP}$ N/mm <sup>2</sup>	Resistenza a trazione monoassiale	0.216
Parametri della superficie di rottura (WW)		
$f_{cWW}$ N/mm <sup>2</sup>	Resistenza a compressione monoassiale	4.00
$f_{iWW}$ N/mm <sup>2</sup>	Resistenza a trazione monoassiale	0.15
$\beta_c$	Coeff. trasmissione taglio fessure chiuse	0.75
$\beta_t$	Coeff. trasmissione taglio fessure aperte	0.25

Sono stati considerati 23 pannelli murari caratterizzati da larghezza  $l = 1000$  mm, spessore  $t = 200$  mm ed altezza crescente, con passo di 100 mm, da 300 mm a 2500 mm. In questo modo si sono ottenute snellezze variabili fra 0.3 e 2.5, con incrementi  $\Delta\lambda$  pari a 0.1. Anche nel caso di questa serie di analisi ogni pannello è stato vincolato assumendo le condizioni di vincolo di *double bending*, illustrate nella Fig. 3, e già adottate



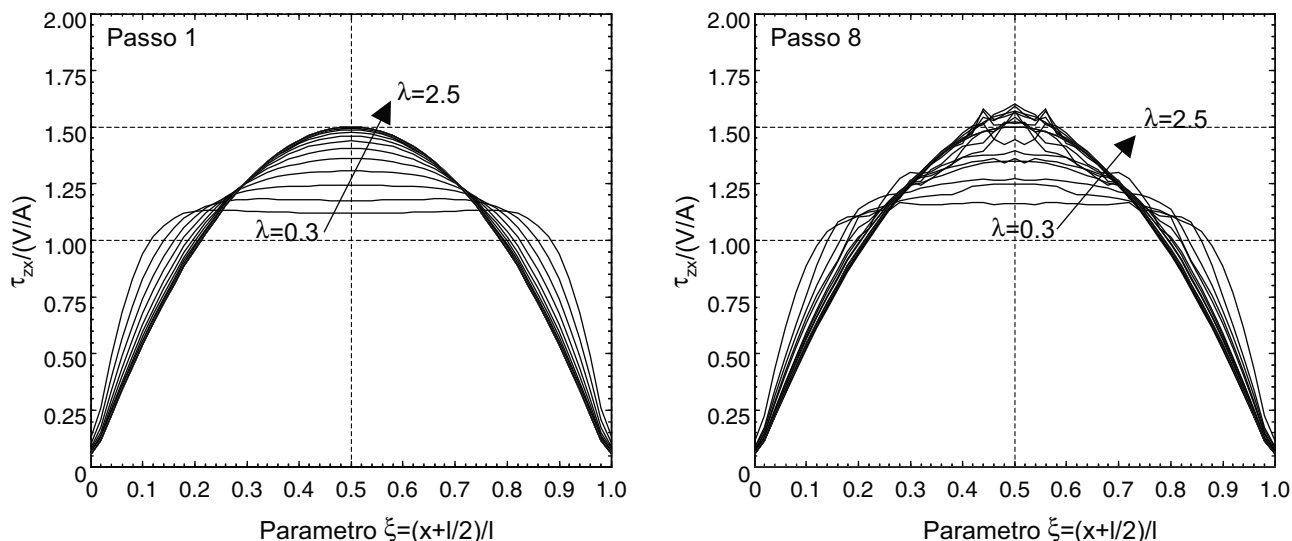


Fig. 10. Andamento della tensione tangenziale  $\tau_{zx}$  lungo la sezione trasversale centrale dei pannelli ottenuta con le analisi non lineari (caso ACS 0.6, passo 1 (regime lineare) e passo 8).

Shear stresses  $\tau_{zx}$  in the midheight section of panels (nonlinear FEM analyses, case ACS 0.6, step 1 and step 8).

nelle analisi lineari. Per ciascuno dei 23 modelli sono stati sviluppati 4 tipi di analisi (92 in totale):

- ACF 0.4: analisi statica non lineare a controllo di forza, con livello di compressione pari a 0.4 volte la capacità portante a sforzo normale ( $P = 0.4ltf_d$ ).
- ACS 0.4: analisi statica non lineare a controllo di spostamento, con livello di compressione pari a 0.4 volte la capacità portante a sforzo normale ( $P = 0.4ltf_d$ ).
- ACF 0.6: analisi statica non lineare a controllo di forza, con livello di compressione pari a 0.6 volte la capacità portante a sforzo normale ( $P = 0.6ltf_d$ ).
- ACS 0.6: analisi statica non lineare a controllo di spostamento, con livello di compressione pari a 0.6 volte la capacità portante a sforzo normale ( $P = 0.6ltf_d$ ).

I livelli di compressione adottati sono abbastanza elevati rispetto alle situazioni che si riscontrano nella maggior parte dei casi reali; tale scelta, necessaria per ottenere rotture a taglio invece che a pressoflessione, restringe indubbiamente il campo di validità dei risultati ottenuti a situazioni in cui il tasso di lavoro della muratura è effettivamente elevato. Va comunque osservato che l'assunzione di valori di compressione medio-alti è in accordo con l'ipotesi di vincolo di *double bending*, che tipicamente si verifica nei pannelli dei piani bassi degli edifici multipiano.

Ciascuna analisi è stata condotta in due passi consecutivi: nel primo è stato applicato il carico di compressione  $P$ , successivamente è stata applicata l'azione di taglio  $V$  (ACF) o lo spostamento orizzontale  $u_x$  (ACS) in sommità. Il carico, forza o spostamento, è stato applicato in modo monotono fino al raggiungimento della crisi del pannello. Le analisi sono state utilizzate per ricavare, in forma adimensionale rispetto a  $\tau_{zx,med} = V/A$ , i diagrammi della distribuzione di  $\tau_{zx}$  in funzione dell'ascissa  $\xi$  sulla sezione centrale di pan-

nelli, al variare della snellezza degli stessi. Le Figg. da 7 a 10 riportano tali diagrammi al variare dei parametri considerati. Per ogni coppia di figure, una è sempre riferita al primo passo del processo di spinta quando i pannelli sono ancora in regime elastico lineare, l'altra è relativa ad un passo dell'applicazione del carico sismico in corrispondenza del quale una buona parte dei modelli ha manifestato lesioni.

L'analisi dei risultati consente di sviluppare alcune osservazioni. Fintanto che l'azione applicata in sommità ai pannelli (forza o spostamento) è tale da non produrre lesioni o schiacciamenti locali significativi, la distribuzione delle tensioni tangenziali  $\tau_{zx}$  non differisce da quanto ricavato nelle analisi lineari svolte in precedenza. Nel caso di pannelli tozzi o mediamente tozzi ( $\lambda \leq 1.0$ ) la  $\tau_{zx}$  mostra ancora un andamento sensibilmente diverso dalla distribuzione uniforme desumibile dalla (10); per  $\lambda$  prossimi all'unità  $\tau_{zx}$  ha forma pressoché parabolica. Le distribuzioni di  $\tau_{zx}$  relative alla fase non lineare differiscono da una configurazione all'altra, poiché entra in gioco la fessurazione. Le Figg. da 11 a 14 mostrano, per quattro differenti valori di snellezza ( $\lambda = 0.5$ ,  $\lambda = 1.0$ ,  $\lambda = 1.5$ ,  $\lambda = 2.0$ ) il quadro fessurativo che si sviluppa a collasso sui pannelli: la diffusione e l'entità del danneggiamento differiscono in base alla snellezza dell'elemento ed al livello di compressione. Per valori bassi della snellezza ( $\lambda = 0.5$ ) i pannelli giungono a collasso manifestando un sistema di doppie lesioni diagonali poste in posizione eccentrica rispetto al baricentro. Tale comportamento è più evidente per le due analisi ACF. I pannelli con i livelli di compressione assiale più elevati (ACF 0.6 ed ACS 0.6, Figg. 13 e 14) mostrano il formarsi di alcune fratture estese a tutta la larghezza delle sezioni di base e di sommità, che potrebbero corrispondere a lesioni a taglio per scorrimento più che a forme anomale di crisi per taglio diagonale.

Per snellezze medie ( $\lambda = 1.0$ ,  $\lambda = 1.5$ ) i pannelli mostrano il classico meccanismo di collasso con for-

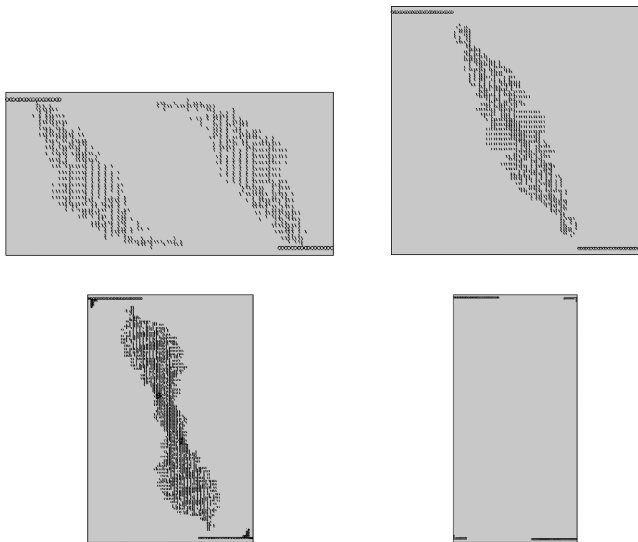


Fig. 11. Quadri fessurativi all'ultimo passo dei pannelli con snellezza pari a 0.5, 1.0, 1.5 e 2.0 per il caso ACF 0.4.  
Cracking patterns at collapse of panels with slenderness' equal to 0.5, 1.0, 1.5 and 2.0 (case ACF 0.4).

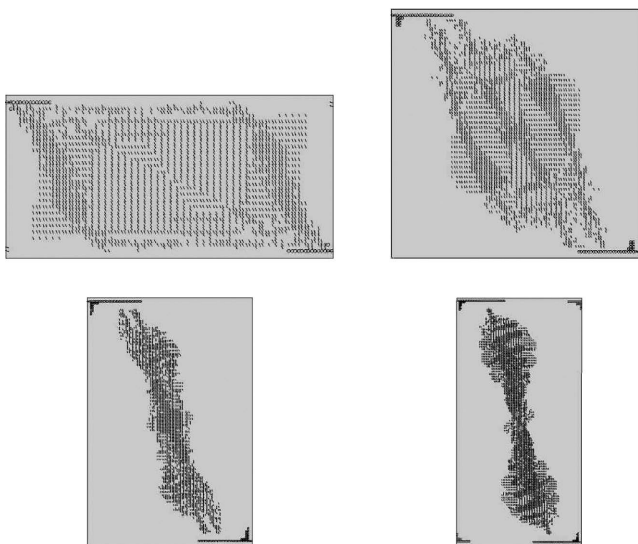


Fig. 12. Quadri fessurativi all'ultimo passo dei pannelli con snellezza pari a 0.5, 1.0, 1.5 e 2.0 per il caso ACS 0.4.  
Cracking patterns at collapse of panels with slenderness' equal to 0.5, 1.0, 1.5 and 2.0 (case ACS 0.4).

mazione della tipica lesione diagonale. Tuttavia, nello schema ACS 0.4 (Fig. 12) per  $\lambda = 1.0$  si registra una distribuzione delle lesioni più estesa in larghezza di quanto non avvenga per gli altri tre casi, mentre per gli schemi ACF 0.6 (Fig. 13) e ACS 0.6 (Fig. 14) si ripresenta il sistema di lesioni lungo le sezioni di base e di sommità del pannello. In questi due ultimi casi è possibile anche osservare fenomeni di schiacciamento del materiale in corrispondenza dei lembi compressi delle sezioni di estremità.

Per valori elevati delle snellezze ( $\lambda = 2.0$ ) i pannelli collassano per pressoflessione, con la formazione di lesioni in corrispondenza delle sezioni di estremità. Le rotture nelle sezioni inferiore e superiore riscontrate nei casi ACF 0.4, ACF 0.6 ed ACS 0.6 possono es-

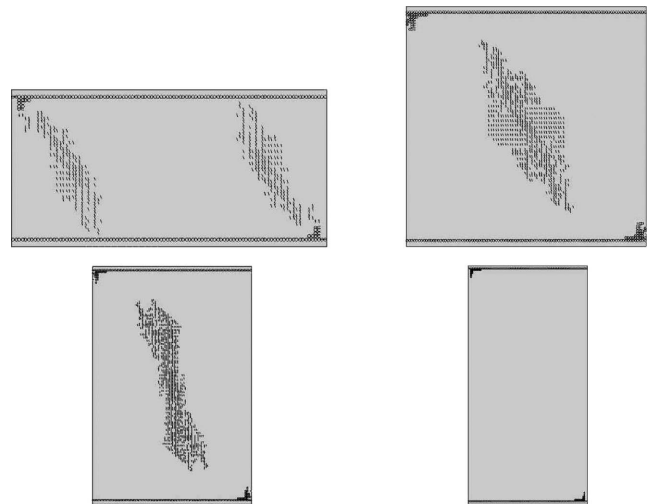


Fig. 13. Quadri fessurativi all'ultimo passo dei pannelli con snellezza pari a 0.5, 1.0, 1.5 e 2.0 per il caso ACF 0.6.  
Cracking patterns at collapse of panels with slenderness' equal to 0.5, 1.0, 1.5 and 2.0 (case ACF 0.6).

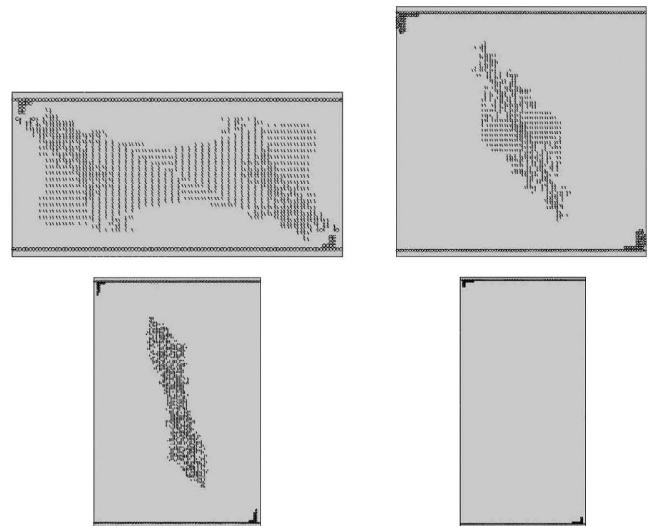
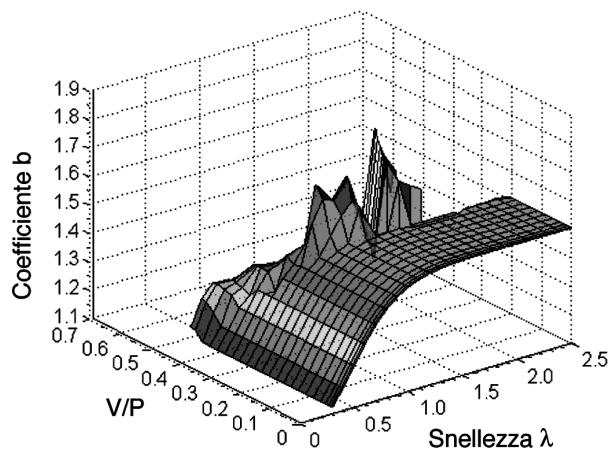


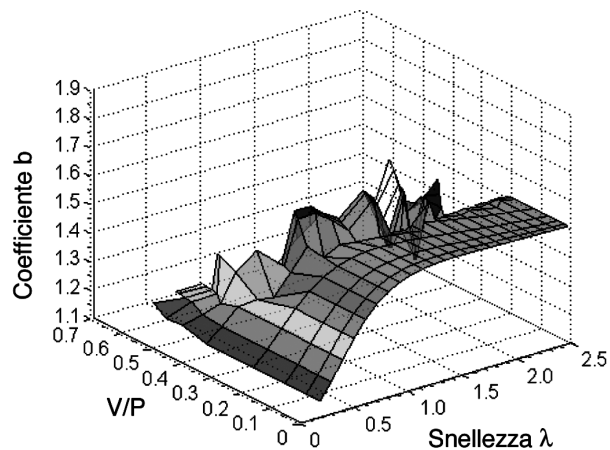
Fig. 14. Quadri fessurativi all'ultimo passo dei pannelli con snellezza pari a 0.5, 1.0, 1.5 e 2.0 per il caso ACS 0.6.  
Cracking patterns at collapse of panels with slenderness' equal to 0.5, 1.0, 1.5 and 2.0 (case ACS 0.6).

sere infatti interpretate come schiacciamento dei lembi compressi ed apertura di fessure ai lembi tesi. Soltanto nel caso ACS 0.4 continua a manifestarsi la rottura a taglio per fessurazione diagonale, caratterizzata da una diffusione delle lesioni più estesa alle estremità della diagonale.

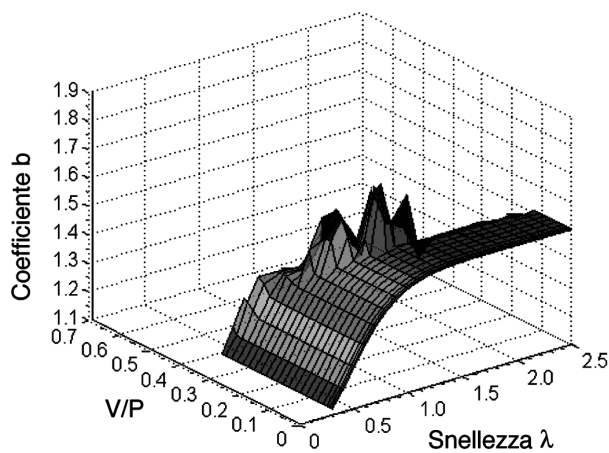
La risposta non lineare dei pannelli ha consentito di valutare l'andamento del coefficiente  $b$  al variare della snellezza  $\lambda$  e del taglio resistente  $V$  durante l'applicazione del carico sismico. La Fig. 15 riporta i corrispondenti diagrammi. In essi i valori di  $V$  sono stati adimensionalizzati rispetto a  $P$  (azione di compressione applicata ai pannelli). Le superfici definite in ciascuno dei quattro diagrammi presentano evidenti irregolarità in corrispondenza dei valori più elevati del taglio: esse identificano gli stadi delle analisi durante i



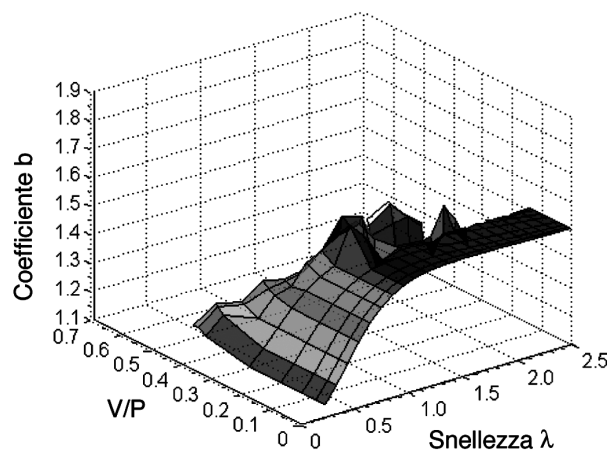
(a)



(b)



(c)



(d)

Fig. 15. (a) Distribuzione del coefficiente di forma  $b$  per i pannelli nel caso ACF 0.4; (b) distribuzione del coefficiente di forma  $b$  per i pannelli nel caso ACS 0.4; (c) distribuzione del coefficiente di forma  $b$  per i pannelli nel caso ACF 0.6; (d) distribuzione del coefficiente di forma  $b$  per i pannelli nel caso ACS 0.6.

(a) Variability of the  $b$  shape factor for panels of analyses ACF 0.4; (b) variability of the  $b$  shape factor for panels of analyses ACS 0.4; (c) variability of the  $b$  shape factor for panels of analyses ACF 0.6; (d) variability of the  $b$  shape factor for panels of analyses ACS 0.6.

quali nascono ed evolvono le rotture nei pannelli (fessurazione e schiacciamento). Per effetto del formarsi e dell'estendersi delle lesioni il taglio resistente, così come la distribuzione delle tensioni tangenziali lungo la sezione di mezzeria, cessano di avere una distribuzione regolare. Poiché, come indica l'Eq. (12), il coefficiente di forma dipende proprio da queste due grandezze, è coerente che anche il suo andamento perda di regolarità; le superfici dei quattro diagrammi risultano quindi lisce fino a che la risposta del materiale è lineare o quasi lineare. Oltre una certa escursione in campo non lineare, a causa dell'irregolarità dell'andamento delle  $\tau_{zx}$ , la definizione del coefficiente di forma  $b$  come rapporto fra  $\tau_{zx,max}$  e  $\tau_{zx,med}$  perde di significato. In questo senso sembra più che mai appropriato l'approccio semplificato scelto da Turnsek e Cacovic per definire il loro criterio di rottura a taglio.

Accertata l'impossibilità di identificare, oltre una certa escursione del comportamento dei pannelli in

campo non lineare (dipendente dall'estensione della zona fessurata), un andamento regolare del coefficiente di forma, si è operato valutando la funzione  $b(\lambda)$  limitatamente al passo di carico immediatamente precedente il manifestarsi delle irregolarità descritte. Le curve  $b(\lambda)$  così ricavate dai 4 tipi di analisi numeriche sono riportate nella Fig. 16, dove sono state confrontate con quelle relative al criterio di Turnsek e Cacovic ed alla relazione (10) di Benedetti e Tomazevic. Esse sono sostanzialmente coincidenti, indicando che né la modalità di analisi (ACF piuttosto che ACS) né il livello di compressione, producono differenze significative. In effetti, si possono attendere differenze più evidenti sulla forma di  $b$  variando le condizioni di vincolo dei pannelli oppure, in misura minore, modificando le caratteristiche meccaniche del materiale. I valori del coefficiente  $b(\lambda)$  sono anche riportati, in forma numerica, nella Tab. 5. In essa tali valori sono riferiti alla media delle 4 serie analizzate. Infatti, in virtù delle modeste

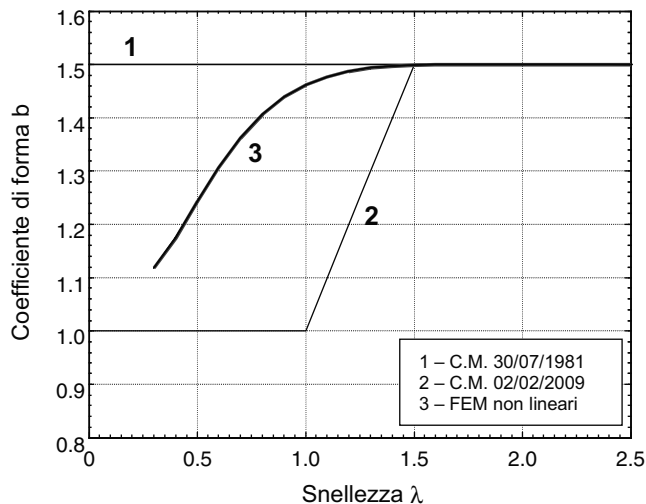


Fig. 16. Confronto fra gli andamenti del coefficiente di forma  $b$  previsti dalle previgenti norme, dalle norme attuali con quelli ricavati con le analisi numeriche in campo non lineare.

Comparisons of the  $b$  shape factor evaluated according to the previous Italian technical law, the actual Italian technical law and the results of the nonlinear FEM analyses.

differenze registrate fra le curve, è ragionevole riferirsi ad una distribuzione unica, ottenuta come media delle quattro calcolate.

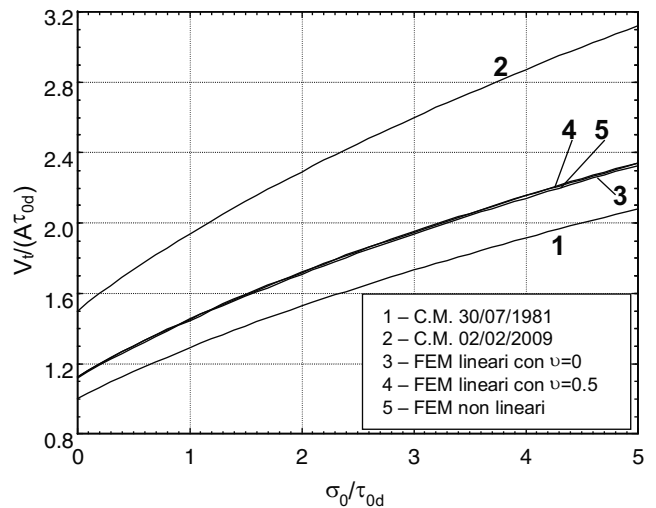
Tabella 5. Coefficiente di forma  $b$  in funzione della snellezza ottenuto con le analisi non lineari.

$b$  shape factor vs panel slenderness (nonlinear analyses).

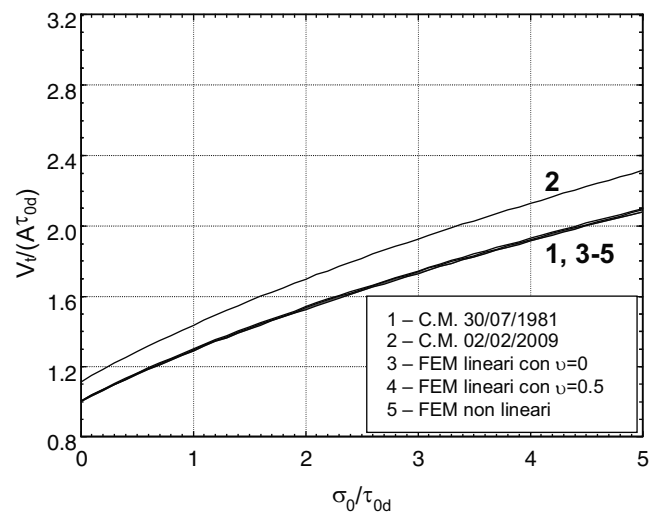
Snellezza $\lambda$	$b$ Media	Snellezza $\lambda$	$b$ Media
0.3	1.12	1.5	1.50
0.4	1.18	1.6	1.50
0.5	1.24	1.7	1.50
0.6	1.31	1.8	1.50
0.7	1.36	1.9	1.50
0.8	1.41	2.0	1.50
0.9	1.44	2.1	1.50
1.0	1.46	2.2	1.50
1.1	1.48	2.3	1.50
1.2	1.49	2.4	1.50
1.3	1.49	2.5	1.50
1.4	1.50	–	–

## 5. Confronto fra i domini di resistenza per taglio diagonale: curve $b(\lambda)$ interpolanti i risultati numerici

I risultati ottenuti mostrano che per pannelli murari caratterizzati da snellezze inferiori a 1.5 l'utilizzo della relazione (10) fornisce un'evidente sottostima del coefficiente di forma  $b$ . La conseguenza più immediata è una valutazione per eccesso del taglio resistente  $V_t$  associato al criterio di rottura per fessurazione diagonale e definito dalla Eq. (2). Questo fatto può essere meglio compreso tracciando i domini di resistenza in accordo al suddetto criterio di rottura per alcuni pannelli murari con snellezza  $\lambda$  inferiore a 1.5. Per eliminare le



a)



b)

Fig. 17. Confronto fra i domini di resistenza del taglio  $V_t$  al variare del criterio di valutazione del coefficiente di forma  $b$ ; (a) pannello Pier-1 ( $\lambda = 0.65$ , /11/), (b) pannello Pier-2 ( $\lambda = 1.35$ , /11/).

Comparisons of shear strengths  $V_t$  varying the definition of  $b$ ; (a) panel Pier-1 ( $\lambda = 0.65$ , /11/), (b) panel Pier-2 ( $\lambda = 1.35$ , /11/).

dipendenze da fattori diversi dal coefficiente di forma  $b$  e dalla snellezza  $\lambda$  dell'elemento, la (2) è posta nella seguente forma adimensionale:

$$\frac{V_t}{A\tau_{0d}} = \frac{1.5}{b(\lambda)} \sqrt{1 + \frac{2}{3} \left( \frac{\sigma_0}{\tau_{0d}} \right)} \quad (13)$$

Nella forma (13) si esplicita, al variare del rapporto  $(\sigma_0/\tau_{0d})$ , il dominio resistente di un pannello in funzione della snellezza  $\lambda$  indipendentemente dalla legge con la quale si determini il coefficiente di forma  $b$ . Come esempi di pannelli con  $\lambda < 1.5$  si possono considerare Pier-1 e Pier-2 analizzati da Calderini *et al.* in /11/ ( $\lambda = 0.65$  per Pier-1,  $\lambda = 1.35$  per Pier-2). Attribuendo a  $b$ , per ognuno dei due pannelli, i valori che si possono dedurre dal criterio di Turnsek e Cacovic, dal criterio di Benedetti e Tomazevic, dalle curve  $b(\lambda)$  dei casi A e B di questo studio (analisi lineari) e dalla

curva media  $b(\lambda)$  di questo studio (analisi non lineari), si hanno i relativi domini di resistenza del taglio (Fig. 17). È subito evidente che per Pier-1 la resistenza valutata a partire dal valore  $b = 1$  di Benedetti e Tomazevic è decisamente superiore sia a quella ottenibile con il  $b$  delle varie curve qui ottenute, sia a quella definita assumendo  $b = 1.5$  secondo Turnsek e Cacovic. Queste differenze risultano meno evidenti per Pier-2, data la sua maggior snellezza, anche se la resistenza ottenuta con  $b$  conforme alla norma /2/ è sempre superiore a quelle derivanti dai  $b$  delle curve di questo studio e assumendo  $b = 1.5$ . È interessante osservare che, per entrambi i pannelli, le resistenze dedotte dai risultati delle analisi numeriche sono in maggior accordo con quelle relative al criterio di Turnsek e Cacovic, che con quelle desumibili dal criterio di Benedetti e Tomazevic. In definitiva, i risultati delle analisi numeriche indicano una sostanziale discordanza per il coefficiente di forma  $b$  con la formulazione (10) riportata nella /2/. In aggiunta, sempre sulla base dei risultati numerici, la formulazione (10) risulta anche essere a sfavore di sicurezza in quanto sovrastima il taglio ultimo resistente.

Utilizzando i risultati ottenuti per via numerica è utile definire un'espressione del coefficiente di forma  $b$  al variare della snellezza  $\lambda$ . A tale scopo è stata interpolata, con spline cubiche, la curva  $b(\lambda)$  ottenuta come media delle quattro serie di analisi non lineari. Suddividendo l'intervallo  $0.3 \leq \lambda \leq 1.5$  in sei sub-intervalli, la funzione interpolante  $b(\lambda)$  è stata definita con sei polinomi di terzo grado, del tipo:

$$S_i(\lambda) = A_i \lambda^3 + B_i \lambda^2 + C_i \lambda + D_i \quad (14)$$

in cui  $i = 1, 2, \dots, 6$  è l'indice che identifica ciascun sub-intervallo. I coefficienti  $A_i$ ,  $B_i$ ,  $C_i$  e  $D_i$  variano in ogni sub-intervallo in modo che le spline di due sub-intervalli consecutivi si raccordino in modo "liscio", ossia imponendo la continuità dei polinomi alle due estremità di ogni sub-intervallo, sino alle loro derivate seconde. Ciò porta all'impostazione del seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} S_i(\lambda_i) = b(\lambda_i) & i = 1, 2, \dots, 6 \\ S_i(\lambda_{i+1}) = b(\lambda_{i+1}) & i = 1, 2, \dots, 6 \\ S'_i(\lambda_{i+1}) = S'_{i+1}(\lambda_{i+1}) & i = 1, 2, \dots, 5 \\ S''_i(\lambda_{i+1}) = S''_{i+1}(\lambda_{i+1}) & i = 1, 2, \dots, 5 \end{cases} \quad (15)$$

nel quale  $\lambda_i$  e  $\lambda_{i+1}$  sono le ascisse di estremità del sub-intervallo  $i$ -esimo. Il numero complessivo di incognite è 24, e dunque le 22 equazioni presenti nella (15) devono essere completate con due condizioni aggiuntive così determinate: a) imponendo che la derivata seconda sia nulla (spline naturale) nell'estremo sinistro dell'intervallo di interesse, ovvero che sia:

$$S''_1(\lambda_1) = 0 \quad (16)$$

e b) imponendo la condizione di tangenza all'asintoto  $b = 1.5$  nell'estremo  $\lambda_7 = 1.5$ :

$$S'_6(\lambda_7) = 0 \quad (17)$$

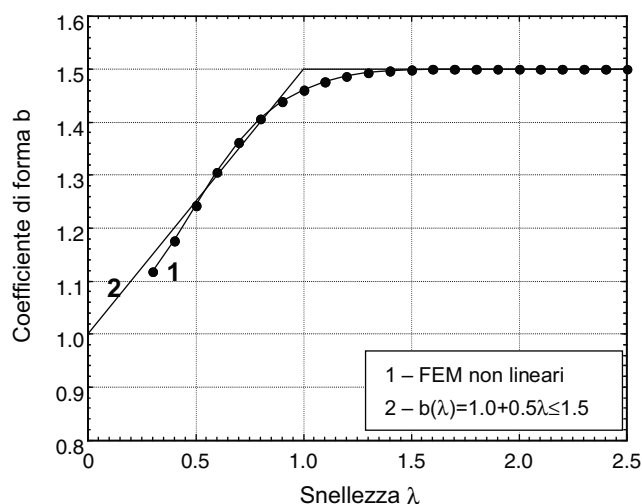


Fig. 18. Curva  $b(\lambda)$  ottenuta con le analisi non lineari (1) e relazione bilineare semplificata (2).

Diagram of  $b(\lambda)$  obtained by the nonlinear FEM analyses (1) and simplified bilinear diagram (2).

Così operando, i quattro coefficienti moltiplicativi assumono, nei singoli sub-intervalli, i valori riportati nella Tab. 6. La curva interpolante è riportata nella Fig. 18 [curva (1)], dove è anche comparata con la distribuzione  $b(\lambda)$  dalla quale è stata ricavata. L'andamento della relazione  $b(\lambda)$  qui ottenuta suggerisce anche l'utilizzo di una relazione approssimata più semplice, ovvero si può porre:

$$b(\lambda) = 1.0 + 0.5\lambda, \quad b \leq 1.5 \quad (18)$$

Tabella 6. Coefficienti di interpolazione delle spline dell'Eq. (14). Interpolation coefficients for the splines of Eqn. (14).

Intervallo	$A_i$	$B_i$	$C_i$	$D_i$
$0.3 \leq \lambda < 0.5$	-0.6736	1.0104	0.1427	1.0021
$0.5 \leq \lambda < 0.7$	-1.1798	1.7697	-0.2370	1.0654
$0.7 \leq \lambda < 0.9$	0.4166	-1.5828	2.1098	0.5178
$0.9 \leq \lambda < 1.1$	0.2864	-1.2313	1.7934	0.6127
$1.1 \leq \lambda < 1.3$	0.3812	-1.5441	2.1375	0.4865
$1.3 \leq \lambda < 1.5$	-0.2727	1.0063	-1.1779	1.9232

Tale relazione, di tipo bilineare, è riportata ancora nella Fig. 18 [curva (2)] e fornisce valori di  $b$  di poco superiori alla curva interpolante (1), tranne che in un piccolo intervallo. Occorre ricordare che questi risultati sono validi per pannelli in condizioni di vincolo di *double bending* ed a tale ipotesi è anche subordinata la validità della (18).

## 6. Conclusioni

I risultati del presente studio suggeriscono che l'espressione del coefficiente di forma  $b$  proposta dalla Circolare Ministeriale del 2 Febbraio 2009 per il criterio di rottura a taglio per fessurazione diagonale è af-

fetta da un'evidente grado di approssimazione quand'è applicata a pannelli murari tozzi e mediamente tozzi. I valori di  $b$  ottenuti da analisi numeriche sia lineari sia non lineari variando la snellezza dei pannelli, sono più elevati di quelli ricavabili dalla formulazione semplificata adottata nella norma, con conseguente riduzione, anche sensibile, del valore del taglio di rottura per fessurazione diagonale.

Certamente, il taglio ultimo del criterio in oggetto dipende in modo determinante anche dalla scelta della resistenza  $\tau_{0d}$  del materiale ed inoltre, come è noto, a causa della redistribuzione delle tensioni dopo la prima fessurazione, il fenomeno del collasso è ben più complesso di quello deducibile dal criterio qui esaminato, che prevede una risposta elastica lineare fino allo stato ultimo. Alla luce di quanto ottenuto sembra quindi opportuna una campagna di sperimentazione ed analisi mirata ad approfondire gli aspetti e le conseguenze evidenziate nel presente lavoro. In particolare, pur mantenendo l'ipotesi del criterio di Turnsek e Cacovic per cui la rottura a taglio si ha per superamento della tensione principale di trazione al centro del pannello, appare opportuno stimare meglio tale tensione in funzione, non solo del coefficiente  $b$ , ma anche della tensione normale orizzontale e dell'effettiva tensione verticale presenti al centro del pannello, ottenendo, tuttavia, una diversa equazione per la resistenza a taglio.

## Ringraziamenti

Gli autori ringraziano la Regione Toscana per il contributo finanziario fornito allo svolgimento ed alla stesura del presente lavoro tramite l'accordo di collaborazione scientifica per "Attività di acquisizione e elaborazione dati derivanti da prove di compressione diagonale su muratura, collaborazione alla realizzazione dell'abaco regionale delle murature, acquisizione ed elaborazione dati derivanti da prove su acciaio da costruzione ed elementi in calcestruzzo".

## Riferimenti bibliografici

- /1/ D.M. del Ministero delle Infrastrutture e dei Trasporti 14 Gennaio 2008, Nuove Norme Tecniche per le Costruzioni, *G.U. n. 29*, 4 Febbraio 2008, S.O. n. 30.
- /2/ Circolare del Ministero delle Infrastrutture 2 Febbraio 2009, Istruzioni per l'applicazione delle "Nuove norme tecniche per le costruzioni" di cui al D.M. del 14/01/2008, *G.U. n. 47*, 26 Febbraio 2009, S.O. n. 27.
- /3/ D.M. LL. PP. 16 Gennaio 1996, Norme tecniche per le costruzioni in zone sismiche, *G.U. n. 29*, 5 Febbraio 1996, e Circolare del Ministero LL. PP. 10 Aprile 1997, *n. 65/AA.GG.*, Istruzioni per l'applicazione delle "Norme tecniche per le costruzioni in zone sismiche", di cui al D.M. LL. PP. 16 Gennaio 1996.
- /4/ Circolare del Ministero LL. PP. 30 Luglio 1981 n. 21745, Istruzioni relative alla normativa tecnica per la riparazione ed il rafforzamento degli edifici in muratura danneggiati dal sisma, Legge 14 Maggio 1981, n° 219, Art.10.
- /5/ Augenti N., *Il calcolo sismico degli edifici in muratura*, UTET, Torino, 2004, pp. 490.
- /6/ Turnsek V., Cacovic F., Some experimental results on the strength of brick masonry walls, *Proceedings of the 2nd International Brick Masonry Conference*, Stoke-on-Trent, 1971, pp. 149-156.
- /7/ Tomaževic M., The computer program POR, *Report ZRMK*, Institute for Testing and Research in Materials and Structures, Ljubljana, 1978, (in Sloveno).
- /8/ Benedetti D., Tomaževic M., Sulla verifica sismica di costruzioni in muratura, *Ingegneria Sismica*, Anno I, n. 0, 1984, pp. 9-16.
- /9/ Chiostri S., Vignoli A., In-situ determination of the strength properties of masonry walls by destructive shear and compression tests, *Masonry International*, The British Masonry Society, Vol. 7, n. 3, 1994, pp. 87-96.
- /10/ Turnsek V., Sheppard P., The shear and flexural resistance of masonry walls, *Proceedings of the International Research Conference on Earthquake Engineering*, Skopje, 1980, pp. 517-573.
- /11/ Calderini C., Cattari S., Lagomarsino S., In-plane strength of unreinforced masonry piers, *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol. 38, n. 2, 2009, pp. 243-267.
- /12/ Calderini C., Lagomarsino S., Continuum model for in-plane anisotropic inelastic behavior of masonry, *Journal of Structural Engineering*, ASCE, Vol. 134, n. 2, February 2008, pp. 209-220.
- /13/ Swanson Analysis System Inc., *ANSYS, Revision 5.0, User's Manual, Theory Manual*, Houston, Texas, USA, 1992.
- /14/ Drucker D., Prager W., Soil mechanics and plastic analysis or limit design, *Quarterly of Applied Mathematics*, Vol. 10, n. 2, 1952, pp. 157-165.
- /15/ Willam K.J., Warnke E.P., Constitutive model for the triaxial behaviour of concrete, *Proceedings of the IASBE Seminar on Concrete Structures Subjected to Triaxial Stresses*, Bergamo, Italy, 17-19 May 1974, International Association for Bridge and Structural Engineering, Vol. 19, 1975, pp. 1-30.
- /16/ Betti M., Galano L., Vignoli A., Seismic Response of Masonry Plane Walls: a Numerical Study on Spandrel Strength, in AIP Conference Proceedings, Vol. 1020, *Proceedings of 2008 Seismic Engineering Conference commemorating the 1908 Messina and Reggio Calabria Earthquake*, Reggio Calabria (MERCEA), 8-11 July 2008, Editors Adolfo Santini and Nicola Moraci, ISBN 978-0-7354-0542-4, Part One, pp. 787-796.
- /17/ Betti M., Galano L., Vignoli A., Analisi sismica non lineare di pareti in muratura e confronti con la normativa, *Atti del Workshop on Design for Rehabilitation of Masonry Structures, WonderMasonry3*, Ischia, Lacco Ameno, 8-10 Ottobre 2009 (in stampa).

# A numerical study on the $b$ shape factor of the shear strength criterion of unreinforced masonry panels

Michele Betti\*, Luciano Galano\*, Michele Petracchi\*\*, Andrea Vignoli\*

**SUMMARY** – After summarising the failure criteria for unreinforced masonry panels provided by the new Italian technical law (NTC 2008), the paper presents a numerical study aimed to investigate the  $b$  shape factor. This shape factor is a coefficient used to evaluate the ultimate shear strength of masonry panels for the failure mechanism with diagonal cracking. The numerical results show that the computed values of the coefficient  $b$  are higher than those proposed by the rules. Consequently, the shear strength obtained applying the equation given by the NTC 2008 does not appear conservative.

**Keywords:** unreinforced masonry, failure criteria, shear failure,  $b$  shape factor, diagonal cracking.

## 1. Introduction

In 2008 the Italian Ministry of Public Works issued new technical rules for buildings and other engineering constructions /1, 2/. These technical regulations have produced significant changes in structural designing and calculating the masonry buildings to be built in seismic zones. Main revisions, for masonry buildings, concern both the methods of structural analysis and the general criteria used to verify the masonry walls under seismic loads.

Given a masonry wall subject to in-plane seismic loads, the previous Italian technical law for buildings /3/ assumed two different collapse typologies, corresponding to as many schemes of calculus (see point 3.1.1 of the technical document /4/ and Fig. 1). The first failure mode was assumed for masonry walls with very stiff and strong spandrels (Fig. 1a). In this case the wall collapses for shear failure of the masonry piers. The second failure mode was assumed for walls with slender spandrels that collapse for combined loads of shear and flexure (Fig. 1b). According to a common interpretation the first calculus scheme was associated to short walls as those of buildings with few stories (two or three story's); equally, the second calculus scheme was associated to slender walls as those of multistory buildings (four or more story's). As a result, short walls were habitually confused with short piers, whereas it is apparent that the panels slenderness depend on the dimensions of the openings rather than the slenderness of the wall /5/.

In addition, the technical document /4/ adopts the Turnsek and Cacovic shear failure criterion to verify each masonry panel /6/. This criterion assumes that a masonry pier fails for shear with a main diagonal crack starting from the centre of the panel. Some examples of application are reported in the Appendix of document /4/. In these examples the calculus method is exemplified in detail for some masonry walls with regular openings (see Fig. 1a). According to this scheme, the same used for the so called shear-type framed struc-

tures, each floor of a building is analyzed separately from the other floors and the masonry piers collapse for shear with diagonal cracking. The POR method is the most common tool used to implement this type of calculus /7/.

As underlined by Augenti /5/, many structural designers and the competent authorities were convinced that the POR method had general validity and it has been applied for the seismic verification of all masonry buildings, leaving out of consideration the true failure mode of each masonry panel.

The new technical rules specified in the NTC 2008 /1/ have removed these ambiguities because the structural analysis must be carried out for the entire building, to satisfy the global balance equations. This is specifically requested for the design of new buildings. We observe that the NTC 2008 allows the use of the POR method only for structural masonry units (SU) of building aggregations (adjacent structures, interconnected structures). In detail, this is underlined at point 8.7.1 of the NTC 2008: *"nonlinear static analysis is suitable for structural design of multistory masonry buildings with rigid floors; for structural units of building aggregations it is allowed to analyze the floors separately one each over, disregarding the variability of the axial force in masonry panels produced by the lateral loads"*. Even in these cases it is understood that the masonry piers may collapse for shear with diagonal cracking or for combined flexure and axial load depending on their slenderness.

In this general framework this paper analyzes some aspects of the shear failure criterion with diagonal cracking as considered in the NTC 2008. Specifically, it is shown that the  $b$  shape factor of this criterion here evaluated with FEM analyses, assumes values significantly different from those suggested in the technical document /2/. According to the numerical results, two different equations for the  $b$  shape factor as function of the panel slenderness are given.

## 2. Failure modes of masonry panels

The new Italian technical rules for masonry buildings in seismic areas /1, 2/ consider three different failure modes of masonry panels and spandrels (Fig. 2): (a)

\* Department of Civil and Environmental Engineering (DICEA), University of Florence, e.mail: mbetti@dicea.unifi.it

\*\* Civil Engineer, e.mail: rrb@teletu.it

failure under combined axial load and bending moment, (b) shear failure with diagonal cracking and (c) sliding shear failure. Accordingly, the rules provide the proper equations for evaluating the ultimate design strengths. For masonry piers, the flexural strength to be used for design is given by (i.e. the ultimate bending moment):

$$M_u = \frac{Pl}{2} \left( 1 - \frac{\sigma_0}{0.85f_d} \right) \quad (1)$$

The ultimate design shear strength for the collapse mode with diagonal cracking is defined as:

$$V_t = lt \frac{f_{td}}{b} \sqrt{1 + \frac{\sigma_0}{f_{td}}} = lt \frac{1.5\tau_{0d}}{b} \sqrt{1 + \frac{\sigma_0}{1.5\tau_{0d}}} \quad (2)$$

Eqn. (2) is introduced for existing masonry buildings, but it is fruitful also for the design of new buildings. The ultimate design shear strength for the sliding failure mode is defined as:

$$V_t = l'tf_{vd} = l't \frac{f_{vk0} + 0.4\sigma_n}{\gamma_M} = l't \frac{f_{vk0} + 0.4 \frac{P}{l't}}{\gamma_M} \quad (3)$$

Symbols corresponding to the geometrical items in Eqns. from (1) to (3) have the following meaning:  $l$  is the panel width,  $t$  is the wall thickness and  $b$  is a shape factor associated to the shear stress distribution in the midheight horizontal section of the panel. Symbols corresponding to the mechanical items are:  $f_d$  is the design compressive strength of the masonry,  $f_{td}$  is the design tensile strength of the masonry,  $f_{vd}$  is the design shear strength for sliding,  $f_{vk0}$  is the characteristic shear strength for sliding without axial force on the panel section and  $\tau_{0d}$  is the same as  $f_{vk0}$  considering the shear failure with diagonal cracking. The coefficient  $\gamma_M$  is a partial safety factor. At last,  $P$  is the design axial load,  $\sigma_0$  is the average normal stress acting on the whole masonry panel section [ $\sigma_0 = P/(lt)$ ] and  $\sigma_n$  is the same as  $\sigma_0$  calculated as  $\sigma_n = P/(l't)$ , being  $l'$  less than  $l$ .  $l'$  is the length of the compressive portion of the transversal section of the panel and it may be evaluated by the expression:

$$l' = 3 \left( \frac{l}{2} - e \right) = 3 \left( \frac{l}{2} - \frac{M}{P} \right) \quad (4)$$

in which  $e$  denotes the axial load eccentricity and  $M$  is the acting bending moment in the same section. As a result of Eq. (2) the characteristic shear strength  $\tau_{0d}$  and the tensile strength  $f_{td}$  of the masonry are linked by:

$$f_{td} = 1.5\tau_{0d} \quad (5)$$

Hence, the strength  $\tau_{0d}$  loses the original meaning, i.e. the masonry shear strength with zero normal compressive stress, unless  $b$  is equal to 1.5. Actually,  $\tau_{0d}$  is a purely mechanical characteristic related to  $f_{td}$  used to define the ultimate shear  $V_t$ . Eqns. from (1) to (4) also hold for design of masonry beams if the axial load  $P$  is known. Contrarywise, the ultimate bending moment of spandrels is given by (i.e. for building models based on the shear-type equivalent frame):

$$M_u = \frac{H_p h}{2} \left( 1 - \frac{H_p}{0.85f_{hd}ht} \right) \quad (6)$$

whereas the ultimate shear strength is defined as the lowest value between:

$$V_p = \frac{2M_u}{l} \quad (7)$$

and:

$$V_t = htf_{vd0} \quad (8)$$

$V_p$  is the shear required for the equilibrium of the beam subject to  $M_u$ , and  $V_t$  is the ultimate shear strength for sliding. Symbols corresponding to the geometrical items in Eqns. from (6) to (8) have the following meaning:  $h$  is the height of vertical section of the masonry beam,  $t$  is the wall thickness and  $l$  is the clear span of the beam. Symbols corresponding to the mechanical items are:  $f_{vd0}$  is the ultimate design shear strength of the masonry with zero normal stress,  $f_{hd}$  is the ultimate design compressive strength of the masonry in the horizontal direction and  $H_p$  is the lowest between the tensile strength of the tie passing across the beam and the quantity  $0.4f_{hd}ht$ .

The technical rules /1, 2/, allow the use of Eqns. (6), (7) and (8) only if the masonry beam is reinforced with an horizontal tie passing across the spandrel like a steel rod or a reinforced concrete boundary beam. The tensile force developed by the tie is essential to equilibrate the compressive force acting on the beam section at the opposite side. For unreinforced masonry beams the only proper shear failure criterion is that corresponding to the collapse with diagonal cracking. So, the ultimate shear may be evaluated by Eqn. (2) with  $h$  instead of  $l$  (if  $\sigma_0$  is unknown it may be supposed equal to zero). In addition to the shear failure criterion a proper failure criterion for combined bending moment and axial load should be considered.

Furthermore, the new rules establish a significant difference for design of new buildings and rehabilitation of existing buildings. In the first case the design strengths of the masonry are evaluated applying the safety factors to the characteristic values, in the second case the design strengths are evaluated applying the same safety factors to the average values.

### 3. The $b$ shape factor of the shear failure criterion with diagonal cracking

The previous technical rules emanated in 1996 /3/ made use of the following equation for evaluate the shear strength of a masonry panel (failure mode with diagonal cracking):

$$V_t = lt\tau_k \sqrt{1 + \frac{\sigma_0}{1.5\tau_k}} \quad (9)$$

Eqn. (9) is given in the Appendix of the technical document of 30 July 1981 /4/ and it was the only formula used to predict the shear strength of a masonry panel. Originally, Turnsek and Cacovic found Eqn. (9) for masonry panels subject to shear and compression under constraint conditions of double bending /6/. They supposed that a crack appeared initially at the centre of mass of the panel when the positive principal stress



equalled the tensile masonry strength. Then the crack increased along the diagonal of the panel up to collapse (Fig. 2b). Eqn. (9) is acceptable only for panels in which the values of the slenderness ratio  $\lambda = h/l$  are in agreement with the Saint-Venant hypothesis. In fact in the Saint-Venant problem applied to a rectangular section the quantity  $1.5\tau_k$  equals the maximum shear strength.

If we consider  $\tau_{0d}$  the same as  $\tau_k$ , Eqns. (2) and (9) are equal only for  $b=1.5$ . The new technical rules suggest  $b$  values variable as function of the panel slenderness  $\lambda$ . Explicitly at point C8.7.1.5 of the document /2/ is written: " $b$  is a corrective coefficient taking into account the variability of the shear stresses along the midheight section and depending on the panel slenderness. It is proper to assume  $b = h/l$ , but no more than 1.5 nor less than 1.0, being  $h$  the height of the panel". This definition is the same as that of Benedetti and Tomazevic /8/:

$$b = \begin{cases} 1.0 & \text{for } \lambda = h/l \leq 1.0 \\ \lambda & \text{for } 1.0 < \lambda = h/l < 1.5 \\ 1.5 & \text{for } 1.5 \leq \lambda = h/l \end{cases} \quad (10)$$

The  $b$  shape factor calculated according to Turnsek and Cacovic /6/ and Benedetti and Tomazevic /8/ is represented in Fig. 6. Eqn. (10) is very simple for practical use, yet it is approximate because the shear strength obtained by Eqn. (2) is overestimated for panels with slenderness ratios lower than 1.5. This is proved by from previous researches on the subject.

In paper /9/ Chiostri and Vignoli found the mechanical characteristics of masonry panels with slenderness ratio equal to one ( $\lambda = h/l = 1$ ) tested in situ with a shear-compression setup. They calculated the  $b$  factor by applying the following formula of Turnsek and Sheppard /10/:

$$(\lambda = 1) \quad b = 1.543 - 0.478 \frac{\tau_u}{\sigma_0} \quad (11)$$

In Eqn. (11) quantity  $\tau_u$ , i.e. the ultimate average shear stress, is present. Table 1 resumes the  $b$  values obtained by the Authors applying Eqn. (11) to their experimental results. In the same table such values are compared with those obtained by Eqn. (10) of Benedetti and Tomazevic. The differences are significant.

Calderini *et al.* /11/ carried out nonlinear finite element analyses for three masonry panels with different slenderness ratio, that is: 0.65 for Pier-1 panel, 1.35 for Pier-2 panel and 2.00 for Pier-3 panel. The details of the constitutive model of the masonry are reported in /12/. The panels were subjected to a constant axial load and to an increasing horizontal displacement applied at the top base under double bending constraint conditions. Panels Pier-1 and Pier-2 collapsed for shear with diagonal cracking, whereas Pier-3 collapsed in flexure. Considering the numerical results for each panel it is evident that the  $b$  shape factor changes as a function of stresses and deformations. In the elastic range average values for  $b$  obtained by the numerical analyses were: 1.33 for Pier-1 ( $\lambda = 0.65$ ), 1.44 for Pier-2 ( $\lambda = 1.35$ ) and 1.48 for Pier-3 ( $\lambda = 2.00$ ). The same values obtained in proximity of the collapse were: 1.15 for Pier-1, 1.37 for Pier-2 and 1.50 for Pier-3. Hence, it is clear that for Pier-1 and Pier-2 the  $b$  factor has values significantly dissimilar from Eqn. (10), even in the nonlinear field of behaviour. The Authors of paper /11/ agree with these

conclusions and observe that for Pier-1 the  $b$  shape factor is never less than 1.15.

Lastly, the results of the previously analyzed researchers show that the proper values of the  $b$  shape factor are appreciably different from those suggested by the actual Italian technical rules /2/ especially for short panels ( $\lambda \leq 1$ ) or panels with medium slenderness ratio ( $1 < \lambda < 1.5$ ).

#### 4. Numerical investigations on the $b$ shape factor

The above results highlight the need to investigate the relationship between the  $b$  shape factor and the panel slenderness  $\lambda$ . A comprehensive study, in addition to the dependence of the  $b$  factor on the panel geometry, should also evaluate the influence of the boundary conditions (i.e. limit cases of double bending and single bending boundary conditions), the influence of the mechanical properties of the masonry (i.e. elastic modulus, Poisson ratio, masonry strength) and the effect of the vertical compressive stress acting on the panel. The numerical investigations herein presented do not consider all of the above factors, being primarily focused on the relationship between the  $b$  factor and the panel slenderness  $\lambda$ . Nevertheless, in the authors' opinion, these analyses provide adequate information to understand the variation of  $b$ .

A first group of numerical analyses was made assuming the linear elastic behavior of the masonry. This assumption agrees with the hypotheses of the Turnsek and Cacovic shear failure criterion with diagonal cracking (i.e. "the stress state is evaluated by assuming masonry as an elastic, homogeneous and isotropic material, until the beginning of the first crack" /6/). Two-dimensional isoparametric finite elements with 4 nodes have been used and 67 different masonry panel geometries in double bending boundary conditions have been analyzed (Fig. 3). The nodes at the base of the models were fixed both in the  $x$  and  $z$  direction, while the nodes at the top section of the panels were fixed in the  $z$  direction and free in the  $x$  direction.

Table 2 reports the adopted mechanical properties of the masonry. The analyses denoted by A ( $\nu = 0$ ,  $E/G = 2$ ), although not fully relevant to real cases, aim to analyze the function  $b(\lambda)$  in this limit condition. The parameters used in the analyses denoted by B ( $\nu = 0.5$ ,  $E/G = 3$ ) are very close to those of a real stone masonry wall (this is evident by examining the masonry typologies reported in /2/).

Overall, 134 cases were analyzed (67 with material parameters A and 67 with material parameters B). The height of the panels was varied to obtain slenderness' variable between 0.015 and 3.0, whereas the width and the thickness were fixed equal to 1000 mm. The panels were meshed with square finite elements whose dimensions were modified according to the actual geometry. Panels were subjected to a compressive load  $P$  of 1 N and a shear force  $V$  of 1 N. The  $b$  shape factor is defined as the ratio between the maximum shear stress  $\tau_{zx,max}$  and the average shear stress  $\tau_{zx,av}$  (the shear stresses are evaluated at the midheight section of the panel):

$$b = \frac{\tau_{zx,max}}{\tau_{zx,av}} = \frac{\tau_{zx,max}}{V} l t \quad (12)$$

Results of the numerical analyses were first used to evaluate the distribution of  $\tau_{zx}$  along the midheight section of the panels as function of their slenderness.

Fig. 4 shows these distributions for panels A and Fig. 5 shows the same distributions for panels B ( $A = It$ ). These plots are presented in dimensionless form and are related to 12 different slenderness values ( $\lambda$  variable between 0.015 up to 1.526). They show that when  $\lambda \leq 1$  the distribution of the shear stress  $\tau_{zx}$  is not uniform; only in the cases in which  $\lambda$  is small ( $0.015 \div 0.053$ )  $\tau_{zx}$  tends asymptotically to such a condition. Hence, in the panels with  $\lambda \leq 1$  the shape factor cannot be assumed equal to 1.0. Fig. 6 compares the function  $b(\lambda)$  obtained by Eqn. (12) with the proposal of Turnsek and Cacovic ( $b = 1.5$ ) and the formula suggested by Benedetti and Tomazevic /8/. It is obvious that for panels with  $\lambda < 1.5$  the values of the  $b$  factor obtained by the numerical analyses differ appreciably from those obtained by Eqn. (10) /2/. For panels with  $\lambda > 1.5$  the  $b$  factor tends asymptotically to the straight line  $b = 1.5$ . The functions  $b(\lambda)$  shown in Fig. 6 (curves 3 and 4) are also reported in Table 3 for selected slenderness values.

Results illustrate that the distribution of the shear stress in the midheight section of a masonry panel subject to shear load does not differ from the one predicted by the Saint-Venant model, even if the slenderness decreases. The shear stresses  $\tau_{zx}$  differ from the uniform distribution ( $b = 1$ ) already for very small slenderness' ( $0.015 \div 0.053$ ). In the actual load-bearing masonry structures it is rather unusual to find panels with slenderness less than 0.3, therefore, it is evident that the condition  $b = 1$  is very rare, and the Eqn. (10) is not reliable for short panels.

A second group of tests was carried out analyzing the masonry panels beyond the linear elastic field. To this aim the general purpose code ANSYS /13/ was used and three-dimensional isoparametric finite elements with 8 nodes were adopted to model the mechanical behaviour of the masonry. Mechanical non linearity's were reproduced by the Drucker-Prager plasticity criterion (DP) /14/ combined with the Willam-Warnke failure criterion (WW) /15/. As a result, the material behaves as an isotropic medium with plastic deformation, cracking and crushing capabilities. The constitutive parameters used for the DP criterion and the WW failure domain are reported in Table 4; these parameters are the same used by Betti *et al.* to model three masonry walls in /16/ and /17/. It is noteworthy to highlight the difference of the tensile and compressive strengths of the DP criterion ( $f_{tDP} = 0.216 \text{ N/mm}^2$ ,  $f_{cDP} = 1.522 \text{ N/mm}^2$ ) and those of the WW failure criterion ( $f_{tWW} = 0.15 \text{ N/mm}^2$ ,  $f_{cWW} = 4.0 \text{ N/mm}^2$ ). The combination of these parameters allows for an elastic-brittle behavior in case of biaxial tensile stresses or biaxial tensile-compressive stresses with low compression level. On the contrary, the material is elastoplastic in case of biaxial compressive stresses or biaxial tensile-compressive stresses with high compression level.

In the nonlinear field, 23 masonry panels were analyzed. These panels had the following geometrical dimensions: width  $l = 1000 \text{ mm}$ , thickness  $t = 200 \text{ mm}$  and height increasing from 300 mm up to 2500 mm with step of 100 mm; the slenderness varies between 0.3 up to 2.5, with increments  $\Delta\lambda$  equal to 0.1. The analyses have been carried out using the same boundary conditions like in the linear analyses (Fig. 3). Each model was used to perform four types of analysis (on the whole 92 cases):

- ACF 0.4: nonlinear static analysis (under force control), with compression level equal to about 40% of the compressive strength ( $P = 0.4Itf_d$ ).

- ACS 0.4: non linear static analysis (under displacement control), with compression level equal to about 40% of the compressive strength ( $P = 0.4Itf_d$ ).

- ACF 0.6: non linear static analysis (under force control), with compression level equal to about 60% of the compressive strength ( $P = 0.6Itf_d$ ).

- ACS 0.6: non linear static analysis (under displacement control), with compression level equal to about 60% of the compressive strength ( $P = 0.6Itf_d$ ).

The selected compressive levels are rather high if compared to those of the real buildings. Nevertheless this choice is necessary to allow shear (rather than flexural) failures. This is certainly a reduction of the range of validity of the obtained results. However, the assumption of medium to high compression vertical stresses is consistent with the hypothesis of double bending boundary condition, which typically occurs in the panels at the lower floors of multistory masonry buildings.

Each analysis was carried out in two steps: during the first step a compressive load  $P$  was applied at the top base of the panels, after a shear load  $V$  (ACF), or an horizontal displacement  $u_x$  (ACS) was applied. The horizontal loading (shear force or displacement) was monotonically applied up to the collapse of the panel. Test results were used to obtain the distribution of the shear stresses in the midheight section of the panels as a function of the dimensionless abscissa  $\xi$  (varying the slenderness). Figs. 7 ÷ 10 show these diagrams (shear stress are in dimensionless form with respect to  $\tau_{zx, av} = V/A$ ). The first figure of each pair always refers to the first step of the loading process (when the panels are still in the linear elastic field), the second figure refers to a step close to the collapse.

Tests results allow a few comments. As long as the horizontal load applied at the top base of the panels does not produce significant cracking and crushing, the distribution of the shear stresses  $\tau_{zx}$  does not differ from that obtained with the linear analyses. Even for short panels ( $\lambda \leq 1.0$ ) the  $\tau_{zx}$  have a shape significantly different from the uniform distribution considered by Eqn. (10). If  $\lambda$  is close to one the shape of the stresses  $\tau_{zx}$  is almost parabolic. After that the first crack or crush occur the shapes of  $\tau_{zx}$  differ one to each other because of the nonlinear effects. Figs. 11÷14 show the ultimate cracking patterns for four different slenderness' ( $\lambda = 0.5$ ,  $\lambda = 1.0$ ,  $\lambda = 1.5$  and,  $\lambda = 2.0$ ); the pattern and extent of damage differ depending on slenderness and compressive level. The panels with low slenderness ( $\lambda = 0.5$ ) achieve collapse showing a double systems of diagonal cracks in eccentric position. This behaviour is more evident for the two ACF analyses. Panels with high levels of compression (ACF 0.6 and ACS 0.6, see Figs. 13 and 14) show a pattern of cracks that covers the entire base and top sections, which probably correspond to sliding shear cracks.

The panels with medium slenderness ( $\lambda = 1.0$  and  $\lambda = 1.5$ ) show the typical collapse mode with a system of diagonal cracks. In the case ACS 0.4 and  $\lambda = 1.0$  the crack pattern is larger in width than in the other cases (Fig. 12). In ACF 0.6 (Fig. 13) and ACS 0.6 (Fig. 14) analyses a system of cracks appeared along the bottom and top sections of the panels. In the latter two cases it is also visible the arising of crushing at the corners of the sections.

The panels with high slenderness ( $\lambda = 2.0$ ) collapse with cracking patterns placed in proximity of the end sections. The damage in the top and bottom sections

of cases ACF 0.4, ACF 0.6 and ACS 0.6 is well interpreted as a crushing of the edges in compression and a crack opening in the edges in tension. Only the panel ACS 0.4 fails with a shear diagonal cracking characterized by a wider spread of the cracks at the ends of the diagonal.

Nonlinear analyses allowed to evaluate the  $b$  shape factor vs slenderness  $\lambda$  and shear strength  $V$ , varying the seismic load (Fig. 15, the values of  $V$  are divided by the compressive load  $P$  applied to the panels). The surfaces represented in Fig. 15 present a number of irregularities next to the highest level of the shear force. They identify the steps of the analyses in which cracking or crushing occur. As a result of the damage the shear stresses lose their regularity; therefore, also the  $b$  shape factor loses its smoothness, as indicated by Eqn. (12). Additionally, the surfaces of the four diagrams are smooth until the response of the panels is linear. Beyond a certain excursion in the nonlinear field, the definition of the shape factor loses its meaning, due to the irregularity of the distribution of  $\tau_{zx}$ . Thus, the simplified approach proposed by Turnsek and Cacovic for  $b$  seems appropriate to define the shear failure criterion.

Given the difficulties in identifying the  $b$  factor beyond a certain amount of damage of the panels, it has been decided to evaluate the function  $b(\lambda)$  just before the arising of the explained irregularities. The diagrams  $b(\lambda)$  as obtained by the four types of numerical analyses are shown in Fig. 16 where they are compared with those proposed by Turnsek and Cacovic and Benedetti and Tomazevic [Eq. (10)]. These curves are roughly coincident indicating that neither the type of analysis (ACF rather than ACS) nor the level of compression produces significant differences. More evident differences in the  $b$  factor may be expected varying the boundary conditions of the panels or, to a lesser extent, changing the mechanical properties of the material. The values of the coefficient  $b$  are also reported in Table 5; they were calculated as the average quantities from the four analyzed series. As a matter of fact, due to the small differences among the curves, it is reasonable to refer to a single distribution for  $b$ .

## 5. Shear strength envelopes for failure with diagonal cracking: functions $b(\lambda)$ interpolating the numerical results

The obtained results show that for masonry panels with slenderness less than 1.5 Eqn. (10) provides an evident underestimation of the  $b$  shape factor, thus producing an overestimation of the shear strength  $V_t$ , as defined by Eqn. (2). This is evident when plotting the shear strength predicted by Eqn. (2) for masonry panels with slenderness less than 1.5. To highlight the role of the  $b$  factor and the slenderness  $\lambda$  Eqn. (2) has been expressed in the following dimensionless form:

$$\frac{V_t}{A\tau_{0d}} = \frac{1.5}{b(\lambda)} \sqrt{1 + \frac{2}{3} \left( \frac{\sigma_0}{\tau_{0d}} \right)} \quad (13)$$

The structure of Eqn. (13) is not modified by the specific relation between the  $b$  factor and the slenderness  $\lambda$ , because the shear strength basically depends on the ratio  $(\sigma_0/\tau_{0d})$  and the slenderness  $\lambda$  of the panels. As examples of panels with  $\lambda$  less than 1.5 we consider

Pier-1 and Pier-2 previously analyzed by Calderini *et al.* /11/ ( $\lambda = 0.65$  for Pier-1 and  $\lambda = 1.35$  for Pier-2). Fig. 17 shows the shear strength domains for these two panels [Eqn. (13)] with the coefficient  $b$  according to: a) the Turnsek and Cacovic criterion (curve 1 in Fig. 17), b) the Benedetti and Tomazevic criterion (curve 2 in Fig. 17), c) the results of the FEM linear analyses of cases A and B (curves 3 and 4 in Fig. 17) and, d) the results of the FEM nonlinear analyses (curve 5 in Fig. 17). The shear strength obtained for panel Pier-1 evaluated with  $b = 1$  (Benedetti and Tomazevic criterion) is greater than all the others; the greater difference is obtained when it is compared with the strength evaluated with  $b = 1.5$  (Turnsek and Cacovic criterion). This difference is less evident for panel Pier-2 due to its slenderness; yet, the shear strength evaluated with  $b$  according to /2/ is still greater than those offered if  $b$  is as obtained in this study or assuming  $b = 1.5$ . For both panels, the shear strengths obtained according to the FEM analyses are in more agreement with those obtained with the Turnsek and Cacovic criterion than those obtained with the Benedetti and Tomazevic criterion. Finally, results of FEM analyses show a significant disagreement with the Eqn. (10) for  $b$  as reported in /2/. Also, the numerical results show that Eqn. (10) overestimates the shear strength.

The numerical results have been used to define an interpolating expression for the  $b$  shape factor as function of the panel slenderness  $\lambda$ . To this aim the values of  $b$  in Table 5 have been interpolated by cubic splines in the range  $0.3 \leq \lambda \leq 1.5$ . The entire range has been divided in six sub-intervals and in each of them the function  $b(\lambda)$  has been defined by the following polynomial expression:

$$S_i(\lambda) = A_i\lambda^3 + B_i\lambda^2 + C_i\lambda + D_i \quad (14)$$

where  $i = 1, 2, \dots, 6$  is the pedice that identifies the sub-interval and the coefficients  $A_i$ ,  $B_i$ ,  $C_i$  and  $D_i$  vary in each sub-interval. By imposing the continuity of the polynomials at the beginning and the end of each sub-interval the following linear system holds:

$$\begin{cases} S_i(\lambda_i) = b(\lambda_i) & i = 1, 2, \dots, 6 \\ S_i(\lambda_{i+1}) = b(\lambda_{i+1}) & i = 1, 2, \dots, 6 \\ S'_i(\lambda_{i+1}) = S'_{i+1}(\lambda_{i+1}) & i = 1, 2, \dots, 5 \\ S''_i(\lambda_{i+1}) = S''_{i+1}(\lambda_{i+1}) & i = 1, 2, \dots, 5 \end{cases} \quad (15)$$

where  $\lambda_i$  and  $\lambda_{i+1}$  are the abscissas of the edges of the  $i$ -th sub-interval. The whole number of unknowns is 24, therefore the 22 equations in (15) must be completed with two additional conditions, i.e.: a) requiring that the second derivative is zero in the left corner of the first sub-interval (natural spline):

$$S''_1(\lambda_1) = 0 \quad (16)$$

and b) by imposing the tangency condition at the asymptote  $b = 1.5$  at the edge  $\lambda_7 = 1.5$ :

$$S'_6(\lambda_7) = 0 \quad (17)$$

Table 6 reports the coefficients resulting from the solution of the linear system and Fig. 18 shows the interpolating function [curve (1)] compared with the original numerical results. The interpolating function matches

quite well the numerical results. Nevertheless, an even simpler expression can be used for  $b$  to approximate the numerical results [Fig. 18, curve (2)]:

$$b(\lambda) = 1.0 + 0.5\lambda, \quad b \leq 1.5 \quad (18)$$

Eqn. (18) is a simple bilinear expression able to offer a proper approximation of the nonlinear FEM results. Yet, it should be noted that these results are valid for masonry panels assuming double bending boundary conditions and this hypothesis is implicit in Eqn. (18).

## 6. Conclusions

Results of this study suggest that the equation of the  $b$  shape factor given by the present Italian Recommendation /2/ is affected by a significant degree of approximation when it is applied to short masonry panels. The  $b$  values evaluated by means of numerical analyses both with linear and nonlinear models are higher than those proposed by the simplified formulation adopted in /2/, resulting in a reduction of the shear strength of the masonry panels.

This strength clearly depends on several variables such as the  $\tau_{0d}$  parameter. In addition, the collapse phenomenon is more complex than that assumed in this simplified formulation in which the masonry panels behave as linear elastic up to the collapse. In particular, it seems fruitful to investigate the tensile strength in the centre of masonry panels as function of the  $b$  factor, the horizontal and the vertical stresses, this leading to a different formulation for the shear strength. Additionally, the obtained results suggest the need of further research on the subject by an experimental campaign.

## Acknowledgements

The authors would to thank the Tuscany Region for financial support given to this work, through the agreement of scientific collaboration "Activities for acquisition and processing data from diagonal compression tests on masonry panels, to make a Regional abacus of masonries, gathering and processing data from tests on steel and concrete structural members".

## References

- /1/ D.M. del Ministero delle Infrastrutture e dei Trasporti 14 Gennaio 2008, Nuove Norme Tecniche per le Costruzioni, *G.U. n. 29*, 4 Febbraio 2008, S.O. n. 30 (in Italian).
- /2/ Circolare del Ministero delle Infrastrutture 2 Febbraio 2009, Istruzioni per l'applicazione delle "Nuove norme tecniche per le costruzioni" di cui al D.M. del 14/01/2008, *G.U. n. 47*, 26 Febbraio 2009, S.O. n. 27 (in Italian).
- /3/ D.M. LL. PP. 16 Gennaio 1996, Norme tecniche per le costruzioni in zone sismiche, *G.U. n. 29*, 5 Febbraio 1996, e Circolare del Ministero LL. PP. 10 Aprile 1997, n. 65/AA.GG., Istruzioni per l'applicazione delle "Norme tecniche per le costruzioni in zone sismiche", di cui al D.M. LL. PP. 16 Gennaio 1996 (in Italian).
- /4/ Circolare del Ministero LL. PP. 30 Luglio 1981 n. 21745, Istruzioni relative alla normativa tecnica per la riparazione ed il rafforzamento degli edifici in muratura danneggiati dal sisma, Legge 14 Maggio 1981, n° 219, Art.10 (in Italian).
- /5/ Augenti N., *Il calcolo sismico degli edifici in muratura*, UTET, Torino, 2004, pp. 490, (in Italian).
- /6/ Turnsek V., Cacovic F., Some experimental results on the strength of brick masonry walls, *Proceedings of the 2nd International Brick Masonry Conference*, Stoke-on-Trent, 1971, pp. 149-156.
- /7/ Tomaževic M., The computer program POR, *Report ZRMK*, Institute for Testing and Research in Materials and Structures, Ljubljana, 1978, (in Slovenian).
- /8/ Benedetti D., Tomaževic M., Sulla verifica sismica di costruzioni in muratura, *Ingegneria Sismica*, Anno I, n. 0, 1984, pp. 9-16 (in Italian).
- /9/ Chiostri S., Vignoli A., In-situ determination of the strength properties of masonry walls by destructive shear and compression tests, *Masonry International*, The British Masonry Society, Vol. 7, n. 3, 1994, pp. 87-96.
- /10/ Turnsek V., Sheppard P., The shear and flexural resistance of masonry walls, *Proceedings of the International Research Conference on Earthquake Engineering*, Skopje, 1980, pp. 517-573.
- /11/ Calderini C., Cattari S., Lagomarsino S., In-plane strength of unreinforced masonry piers, *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol. 38, n. 2, 2009, pp. 243-267.
- /12/ Calderini C., Lagomarsino S., Continuum model for in-plane anisotropic inelastic behavior of masonry, *Journal of Structural Engineering*, ASCE, Vol. 134, n. 2, February 2008, pp. 209-220.
- /13/ Swanson Analysis System Inc., *ANSYS, Revision 5.0, User's Manual, Theory Manual*, Houston, Texas, USA, 1992.
- /14/ Drucker D., Prager W., Soil mechanics and plastic analysis or limit design, *Quarterly of Applied Mathematics*, Vol. 10, n. 2, 1952, pp. 157-165.
- /15/ Willam K.J., Warnke E.P., Constitutive model for the triaxial behaviour of concrete, *Proceedings of the IASBE Seminar on Concrete Structures Subjected to Triaxial Stresses*, Bergamo, Italy, 17-19 May 1974, International Association for Bridge and Structural Engineering, Vol. 19, 1975, pp. 1-30.
- /16/ Betti M., Galano L., Vignoli A., Seismic Response of Masonry Plane Walls: a Numerical Study on Spandrel Strength, in AIP Conference Proceedings, Vol. 1020, *Proceedings of 2008 Seismic Engineering Conference commemorating the 1908 Messina and Reggio Calabria Earthquake*, Reggio Calabria (MERCEA), 8-11 July 2008, Editors Adolfo Santini and Nicola Moraci, ISBN 978-0-7354-0542-4, Part One, pp. 787-796.
- /17/ Betti M., Galano L., Vignoli A., Analisi sismica non lineare di pareti in muratura e confronti con la normativa, *Atti del Workshop on Design for Rehabilitation of Masonry Structures, WonderMasonry3*, Ischia, Lacco Ameno, 8-10 Ottobre 2009 (in print, in Italian).